PRÉSENTATION DES TRAVAUX ET PROJET DE RECHERCHE
RIGIDITÉS ENTRE GÉOMÉTRIE ET DYNAMIQUE

MARTIN MION-MOUTON

Table des matières

Date: 18 mars 2024.

1. Introduction

Mon travail de recherche se situe à l'intersection de la géométrie différentielle et des systèmes dynamiques, et je m'intéresse d'une manière générale aux questions faisant interagir les objets et méthodes provenant de ces deux domaines. Plus précisément, le thème unifiant l'essentiel de mes travaux et intérêts de recherche est l'exploration des phénomènes de rigidité apparaissant en présence d'un système dynamique « assez riche » préservant une structure géométrique « assez rigide ». Selon les questions que j'étudie et dont je présente ci-dessous un résumé thématique, la rigidité peut tour à tour être imposée par la dynamique sur la géométrie ou vice-versa, et rebondir de nouveau pour imposer *a posteriori* une rigidité sur la dynamique.

1.1. **Rigidité des dynamiques hyperboliques à distributions invariantes lisses.** Le premier aspect de mes travaux (présentés au paragraphe 3) et projets de recherche (introduits au paragraphe 7) concerne les systèmes dynamiques hyperboliques ou partiellement hyperboliques, et l'étude de leur rigidité dans le cas où leurs distributions invariantes sont lisses.

Dans la lignée de travaux passés analogues concernant les flots d'Anosov [Ghy87, BFL92] (présentés au paragraphe 2), j'ai obtenu à ce sujet dans [MM22b] un résultat de classification à conjugaison $\mathcal{C}^\infty$ près des *difféomorphismes partiellement hyperboliques* en dimension trois sans point errant, dont les fibrés invariants sont lisses et dont la somme des directions stable et instable est de contact (les énoncés précis sont donnés aux théorèmes A et B). Ce travail repose sur l'étude d'une structure géométrique dite *rigide* préservée par ces difféomorphismes, appelée *géométrie de chemins*, et nécessite des outils différents de ceux disponibles dans le cas des flots d'Anosov, fournis par les *géométries de Cartan* (ces différentes notions géométriques sont introduites au paragraphe 4). Dans [FMMV21], nous adoptons avec Elisha Falbel et Jose Miguel Veloso le même type de méthodes pour obtenir un résultat de rigidité concernant les géométries de chemins *strictes* dont le groupe d'automorphismes est non-compact (dont l'énoncé précis est donné au théorème C).

La première partie de mon projet de recherche consiste à poursuivre l'étude générale de la rigidité des dynamiques (partiellement) hyperboliques lorsque leurs distributions invariantes sont lisses. Dans deux travaux en cours présentés au paragraphe 7.1, j'aborde un problème absent de la littérature jusqu'à présent en étudiant cette rigidité sans hypothèse géométrique *a priori* (de type contact, par exemple) sur la distribution stable-instable. D'une part dans un projet en cours avec Karin Melnick présenté au paragraphe 7.1.b concernant les flots d'Anosov en dimension 5, et d'autre part concernant les difféomorphismes partiellement hyperboliques en dimension trois dans un travail en cours présenté au paragraphe 7.1.c. L'étude des difféomorphismes partiellement hyperboliques de type contact en dimension supérieure constitue un projet à plus long terme, dont je dégage au paragraphe 7.2 les principaux enjeux et difficultés, afin d'esquisser la stratégie que je poursuis pour ce travail.

1.2. **Structures drapeaux sur les trois-variétés.** Le second aspect de mes travaux (présentés au paragraphe 5) concerne l'étude des variétés fermées de dimension trois munies d'une *structure drapeaux*, c'est à dire d'une structure géométrique localement modelée sur l'espace des drapeaux de dimension trois, homogène sous l'action du groupe $\mathrm{PGL}_3(\mathbb{R})$.

Je m'intéresse en effet au problème dual à celui mis en avant au paragraphe précédent : décrire les géométries de chemins compactes dont le groupe d'automorphismes est non-compact (cela s'inscrit dans un programme suggéré plus généralement dans [GD91] au sujet de toute structure géométrique rigide). L'espace des drapeaux étant le modèle plat des géométries de chemins (en un sens qui sera rendu précis au paragraphe 4), il est naturel de commencer par le cas plus simple des structures drapeaux – qui sont donc les géométries de chemins de *courbure nulle* – pour chercher à comprendre la variété possible d'exemples. Je construis ainsi dans [MM22a] des exemples de structures drapeaux sur des 3-variétés fermées, de géométrie et topologie complexes et dont le groupe d'automorphisme est non-compact – ce qui suggère que le problème de classification évoqué précédemment a peu de chance d'être résolu en toute généralité, ne serait-ce que dans le cas de la courbure nulle. Ces exemples sont obtenus par une compactification de la structure drapeau préservée par le flot géodésique d'une surface hyperbolique non-compacte, et par l'étude du flot géodésique compactifié (l'énoncé précis est présenté au théorème D). Nous utilisons avec Elisha Falbel dans l'article en cours de rédaction [FMM] les outils introduits dans [MM22a] pour définir un procédé de *chirurgie* de structures drapeaux, qui nous permet de construire de nouvelles structures drapeaux « exotiques » *non-uniformisables* (l'énoncé précis est donné au théorème E).

1.3. **Surfaces Lorentziennes singulières à courbure constante.** Le troisième aspect de mes travaux (présentés au paragraphe 6) et projets de recherche (introduits au paragraphe 8) concerne la rigidité des surfaces Lorentziennes singulières vis-à-vis de la dynamique de leurs feuilletages lumières et d'échanges d'intervalles homographiques par morceaux, ainsi que leurs liens avec les flots d'Anosov en dimension trois.

Dans le travail en cours de rédaction [MM], j'initie l'étude des métriques de-Sitter singulières dans le cas des tores à une singularité, en montrant que l'unique invariant global d'isométrie d'une telle structure est la classe d'équivalence topologique de ses feuilletages lumières (l'énoncé précis est donné au théorème F). J'obtiens ainsi au théorème G une description de l'espace de Teichmüller des métriques de-Sitter du tore à une singularité, à travers les cycles asymptotiques de leurs feuilletages lumières.

Dans un travail récemment initié avec Selim Ghazouani et présenté au paragraphe 8.1, nous poursuivons cette étude en considérant le cas des tores à plusieurs singularités. À plus long terme, nous souhaitons également introduire et étudier des structures analogues en genre supérieur, et dans le cas de la courbure nulle. Une de mes motivations pour l'étude de ces structures au delà de leur intérêt géométrique propre, est leur lien avec diverses questions dynamiques. Un projet en collaboration avec Pierre Dehornoy et Selim Ghazouani et présenté au paragraphe 8.2, vise ainsi à utiliser les sections de Birkhoff des flots d'Anosov de dimension trois pour construire transversalement à ces flots une métrique Lorentzienne singulière.

Ce projet est en un sens un prolongement naturel des situations que j'ai étudiées jusqu'à présent et que je vais décrire par la suite. En effet si l'un des objectifs de ce texte est de convaincre la lectrice que l'existence d'une structure géométrique rigide *invariante* par un flot d'Anosov est de nature exceptionnelle, l'existence d'une telle structure – qui plus est singulière – *transversalement* au flot pourrait être à la fois assez peu contraignante pour apparaître pour une large classe de flots, tout en fournissant de nombreuses informations sur ces derniers (grâce à la rigidité conjecturée des surfaces Lorentziennes singulières à courbure constante vis à vis de leurs feuilletages lumières).

Partie I. Présentation des travaux

2. Travaux antérieurs : flots d'Anosov de contact

La rigidité imposée par la régularité des distributions invariantes a été tout d'abord étudiée pour les flots d'Anosov de type contact.

2.1. **Flots d'Anosov.** Un flot non-singulier (φ^t) de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur une variété fermée M est *d'Anosov* si sa différentielle préserve un scindement $\mathrm{T}M = E^s \oplus E^c \oplus E^u$ du fibré tangent, où E^c est la direction du flot et E^s et E^u sont deux distributions (non-nulles) vérifiant les hypothèses suivantes par rapport à une métrique Riemannienne quelconque sur M :

(1) la *distribution stable* E^s est *uniformément contractée* par (φ^t), *i.e.* il existe deux constantes $C > 0$ et $0 < \lambda < 1$ telles que pour tout $t \in \mathbb{R}$ et $x \in M$:

$$\left\| \mathrm{D}_x \varphi^t|_{E^s} \right\| \leq C\lambda^t; \tag{2.1}$$

(2) la *distribution instable* E^u est *uniformément dilatée* par (φ^t), *i.e.* uniformément contractée par (φ^{-t}).

Les exemples les plus simples de flots d'Anosov sont fournis d'une part par la suspension d'un automorphisme *hyperbolique* du tore $\mathbf{T}^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ (c'est à dire du difféomorphisme d'Anosov induit par une matrice de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$ sans valeur propre de module 1), et d'autre part par le flot géodésique d'une surface hyperbolique fermée. Ces exemples peuvent être décrits comme des groupes à un paramètre agissant sur des quotients compacts de groupes de Lie, et sont pour cette raison appelés *flots d'Anosov algébriques*. Ces derniers constituaient les seuls exemples connus de flots d'Anosov modulo équivalence orbitale topologique jusqu'aux exemples non-transitifs de Franks et Williams dans [FW80], mais il existe désormais une grande variété de flots d'Anosov construits par chirurgie.

2.2. **Rigidité des flots d'Anosov de contact.** Les distributions stable et instable des flots d'Anosov algébriques vérifient cependant une propriété qui les rendent exceptionnels : E^s et E^u sont toutes deux de classe $\mathcal{C}^\infty$, alors qu'elles ne sont en général qu'Hölder continues pour un flot d'Anosov quelconque. La distribution $E^s \oplus E^u$ est par ailleurs intégrable dans le cas des suspensions, et est une distribution de contact dans le cas des flots géodésiques – on parlera dans ce cas d'un *flot d'Anosov de contact*. Rappelons qu'une distribution d'hyperplans sur une variété de dimension impaire $2n+1$ est *de contact* lorsqu'elle est localement le noyau d'une *forme de contact* θ, c'est à dire d'une 1-forme pour laquelle $\theta \wedge (d\theta)^n$ ne s'annule pas (ce qui signifie géométriquement que la distribution n'est intégrable sur aucun ouvert non-vide). Le résultat suivant de Ghys nous dit que nous avons décrit tous les exemples à distributions invariantes lisses.

Théorème 2.1 ([Ghy87])**.** *Soit (φ^t) un flot d'Anosov de dimension trois dont les distributions stable et instable sont de classe $\mathcal{C}^2$. Alors à revêtement fini près, (φ^t) est soit $\mathcal{C}^2$-orbitalement équivalent*[1] *au flot géodésique d'une surface hyperbolique fermée, soit $\mathcal{C}^2$-conjugué à la suspension d'un automorphisme hyperbolique du tore.*

Plus précisément, Ghys montre que le reparamétrage du flot géodésique pouvant advenir dans le cas contact-Anosov est très spécifique, et que tout flot d'Anosov de contact à distributions lisses est conjugué à un exemple algébrique[2]. Dans la suite de ce texte, nous appellerons *flots d'Anosov de contact algébriques* de dimension trois ces exemples.

Ce résultat de Ghys a été généralisé en dimension supérieure par Benoist, Foulon et Labourie en 1992 dans [BFL92] dans le cas où le champ $E^s \oplus E^u$ est de contact : tout flot d'Anosov de contact dont les distributions stable et instable sont lisses est, à revêtement fini près, $\mathcal{C}^\infty$-orbitalement équivalent au flot géodésique d'une variété Riemannienne localement symétrique à courbure strictement négative.

3. Difféomorphismes partiellement hyperboliques de contact en dimension trois

Les résultats de [Ghy87] et [BFL92] sont paradigmatiques de la rigidité dynamique qui peut être déduite d'hypothèses géométriques *dans le cas des flots*. Une question naturelle est alors de comprendre si la même rigidité subsiste pour des systèmes dynamiques à *temps discret*, c'est à dire en remplaçant le flot par un difféomorphisme vérifiant des propriétés dynamiques similaires.

Précisons tout de suite une différence géométrique fondamentale entre le cas d'un difféomorphisme et celui d'un flot. Si l'on interprète le triplet de distributions invariantes (E^s, E^c, E^u) d'un flot d'Anosov (φ^t) comme une structure géométrique $\mathcal{S}$, (φ^t) définit un sous-groupe à un paramètre du groupe des automorphismes de $\mathcal{S}$. Si (φ^t) est maintenant remplacé par les itérées d'un difféomorphisme f préservant $\mathcal{S}$, on passe d'une copie de $\mathbb{R}$ dans $\mathrm{Aut}(\mathcal{S})$ à une copie de $\mathbb{Z}$, et la perte d'information devient manifeste : il n'y a désormais *a priori* plus aucune raison pour que $\mathcal{S}$ admette un sous-groupe à un paramètre d'automorphismes.

3.1. **Difféomorphismes partiellement hyperboliques.** Les *difféomorphismes partiellement hyperboliques* constituent les analogues naturels aux flots d'Anosov pour les temps discrets, ils ont été particulièrement étudiés depuis la fin des années 90 et constituent actuellement un domaine de recherche extrêmement actif (voir par exemple [CP15] pour une introduction précise au sujet, et [HP18] pour un *survey* concernant les résultats de classification).

Un difféomorphisme f d'une variété compacte M est dit *partiellement hyperbolique* si $\mathrm{D}f$ préserve une décomposition $\mathrm{T}M = E^s \oplus E^c \oplus E^u$ du fibré tangent à M, telle que E^s (respectivement E^u) est uniformément contractée (resp. dilatée) par f (au sens de (2.1)), et telle que la décomposition soit *dominée*. La notion de domination ne jouant aucun rôle dans les résultats et les questions présentés par la suite, nous ne attarderons pas à son sujet. Disons simplement, pour en transmettre une idée intuitive, qu'elle consiste à supposer E^c « exponentiellement moins contractée » que E^s et « exponentiellement moins dilatée » que E^u.

1. Une orbite-équivalence est un difféomorphisme envoyant les orbites du premier flot sur celles du second (mais autorisant un changement de paramétrage du flot le long des orbites).

2. Fourni par l'action à droite du sous-groupe diagonal A sur un quotient compact $\Gamma\backslash\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ par un sous-groupe discret $\Gamma \subset \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R}) \times A$ (voir [Ghy87, §2] et [Sal99, Théorème 4.1.1.1] pour plus de détails)

3.2. **Rigidité des difféomorphismes partiellement hyperboliques de contact.** Pour un difféomorphisme partiellement hyperbolique f, le cas analogue à celui étudié dans [Ghy87, BFL92] pour les flots d'Anosov de contact est celui où chacune des trois *distributions invariantes* E^s, E^c et E^u est de classe $\mathcal{C}^\infty$, et où $E^s \oplus E^u$ est par ailleurs une distribution de contact. Les temps un des flots d'Anosov de contact algébriques introduits précédemment fournissent les premiers exemples de tels difféomorphismes partiellement hyperboliques. Il est également possible d'en construire des exemples algébriques qui ne sont le temps un d'aucun flot d'Anosov sur des quotients compacts $\Gamma\backslash\mathrm{Heis}(3)$ du groupe d'Heisenberg. Ces exemples sont obtenus à partir d'automorphismes affines de $\mathrm{Heis}(3)$ préservant le réseau Γ, et nous les appellerons *automorphismes affines partiellement hyperboliques de nil-variétés* (voir par exemple [MM22b, §1.1] pour plus de détails). Nous pouvons maintenant énoncer le résultat ci-dessous, qui constitue, dans le cas où la somme $E^s \oplus E^u$ est de contact, un analogue au résultat de [Ghy87] pour le cas des temps discrets.

Théorème A ([MM22b, Theorem A]). *Soit f un difféomorphisme partiellement hyperbolique d'une variété fermée et connexe M de dimension trois, dont les distributions invariantes sont lisses, tel que $E^s \oplus E^u$ est de contact, et dont l'ensemble non-errant est égal à M. Alors modulo revêtements et itérées finis, f est $\mathcal{C}^\infty$-conjugué à l'un des exemples suivants :*

(1) le temps un d'un flot d'Anosov de contact algébrique,

(2) ou un automorphisme affine partiellement hyperbolique de nil-variété.

Un point $x \in M$ est non-errant s'il existe une suite d'entiers $k_n \to +\infty$ et une suite de points x_n convergeant vers x, tel que $f^{k_n}(x_n)$ converge vers x. Si f préserve une mesure borélienne finie de support total, par exemple celle induite par une forme de volume continue, alors le théorème de récurrence de Poincaré impose à tous les points d'être non-errants. Or si un flot non-singulier (φ^t) d'une variété de dimension $2n+1$ préserve un champ de plans de contact H et lui est transverse, alors la formule $\lambda(\frac{d\varphi^t}{dt}) = 1$ définit une 1-forme de contact *canonique* λ de noyau H, préservée par (φ^t). Un tel flot (φ^t) préserve donc toujours un volume $\lambda \wedge (d\lambda)^n$, si bien que l'absence de points errants est automatiquement vérifiée en présence d'un flot préservant une structure de contact H. À l'opposé, un difféomorphisme f peut tout à fait préserver une structure de contact H sans préserver la moindre forme de contact de noyau H – des exemples de tels difféomorphismes seront fournis par les automorphismes essentiels construits au théorème D ci-dessous. Ceci explique que l'hypothèse sur l'absence de points errants, superflue dans le cas des flots d'Anosov de contact, devienne nécessaire dans l'énoncé ci-dessus. C'est la manifestation la plus immédiate de la différence fondamentale entre l'étude des flots et celle des difféomorphismes, qui devient plus claire encore lors de l'étude de la structure géométrique associée : l'existence d'un flot non-singulier préservant cette structure est une contrainte bien plus forte que celle fournie par un simple difféomorphisme.

La conclusion du théorème A demeure sans aucune hypothèse de domination sur la distribution lisse E^c, qui doit simplement être préservée par $\mathrm{D}f$. Par ailleurs, la méthode utilisée n'utilise pas non plus l'hypothèse d'uniformité sur la contraction (respectivement expansion) des distributions E^s et E^u par f. Afin de fournir un résultat plus précis, convenons donc de dire qu'une distribution E est *faiblement contractée* par f si pour tout $x \in M$:

$$\lim_{n\to+\infty} \|\mathrm{D}_x f^n|_E\| = 0 \text{ ou } \lim_{n\to-\infty} \|\mathrm{D}_x f^n|_E\| = 0. \tag{3.1}$$ [3]

Nous pouvons alors formuler l'énoncé ci-dessous (dont le théorème A est un corollaire immédiat, grâce à un résultat de Brin dans [Bri75]).

Théorème B ([MM22b, Theorem B]). *Soit f un difféomorphisme d'une variété fermée et connexe M de dimension trois, préservant un scindement lisse $\mathrm{T}M = E^\alpha \oplus E^c \oplus E^\beta$ tel que $E^\alpha \oplus E^\beta$ est une distribution de contact. Si f a une orbite dense et si E^α et E^β sont toutes deux faiblement contractées au sens de* (3.1)*, alors les conclusions du théorème A s'appliquent à f.*

3. On notera que cette notion est proche de celle d'*isomorphisme quasi-Anosov* étudiée par Mañé dans [Mañ77] (et appliquée au fibré quotient $\mathrm{T}M/E^c$ dans notre cas), bien qu'elle ne lui pas soit équivalente.

4. Géométries de chemins, géométries de Cartan et rigidité

L'énoncé du théorème B met en avant, non plus une propriété dynamique d'hyperbolicité (partielle) sur le difféomorphisme f, mais le fait que ce dernier soit un *automorphisme* de la structure géométrique $\mathcal{S}=(E^\alpha,E^\beta,E^c)$ – c'est à dire que $f^*E^\varepsilon=E^\varepsilon$ pour chacune des trois distributions. Une telle structure $\mathcal{S}$, définie par un scindement de $\mathrm{T}M$ en trois champs de droites lisses tels que la somme $E^\alpha\oplus E^\beta$ des deux premiers est une structure de contact, sera appelée *géométrie de chemins enrichie*. Elle se trouve être *rigide* au sens où son pseudo-groupe d'automorphismes locaux est de dimension finie.

L'idée centrale est alors que l'existence d'un automorphisme f de $\mathcal{S}$ engendrant un groupe non-compact est de nature exceptionnelle (car $\mathcal{S}$ étant rigide, elle est génériquement vouée à avoir « peu » d'automorphismes), et que les structures $\mathcal{S}$ admettant un tel automorphisme devraient donc être assez rares pour être classifiables géométriquement. En retour, une connaissance précise de $\mathcal{S}$ devrait permettre la classification dynamique de f – l'idée étant que si l'on comprend bien une structure géométrique, on s'attend à comprendre tout aussi bien ses automorphismes.

4.1. **Géométries de chemins.** La structure sous-jacente à une géométrie de chemins enrichies $\mathcal{S}=(E^\alpha,E^\beta,E^c)$, et qui est en réalité à l'origine de sa rigidité, est le couple $\mathcal{L}=(E^\alpha,E^\beta)$ de champs de droites transverses de somme contact, que nous appellerons *géométrie de chemins*. Cette structure, dont l'étude remonte à Élie Cartan dans [Car24] (et peut-être même, plus précisément, à Sophus Lie avant lui), est parfois également appelée *structure Lagrangienne de contact* (c'est également le nom de sa généralisation naturelle en dimension supérieure, introduite au paragraphe 7.2.a).

4.1.a. *Géométrie de chemins d'une surface projective.* Un exemple naturel de géométrie de chemins est obtenu de la manière suivante sur le projectivisé $\pi\colon M=\mathbf{P}(\mathrm{T}\Sigma)\to\Sigma$ du fibré tangent à une surface Σ. Supposons Σ munie d'une classe projective $[\nabla]$ de connexion affines, c'est à dire d'un ensemble de connexions ayant les même géodésiques non-paramétrées – on peut par exemple considérer les géodésiques d'une métrique Riemannienne. Alors par tout point $x=(p,l)\in\mathbf{P}(\mathrm{T}\Sigma)$ passe une unique courbe $\mathcal{F}^\beta(x)$ définie par les tangentes à la géodésique de $[\nabla]$ passant par $p\in\Sigma$ dans la direction $l\in\mathbf{P}(\mathrm{T}_p\Sigma)$. Ces courbes définissent un feuilletage $\mathcal{F}^\beta$ de dimension un de M dont on note E^β la distribution tangente. En notant $E^\alpha=\mathrm{Ker}\,\mathrm{D}\pi$ la direction des fibres de la projection π, on vérifie que $E^\alpha\oplus E^\beta$ est de contact, si bien que $\mathcal{L}_{[\nabla]}=(E^\alpha,E^\beta)$ est une géométrie de chemins sur $\mathbf{P}(\mathrm{T}\Sigma)$.

4.1.b. *Espace des drapeaux.* Ayant constaté que seule la structure projective de la surface Σ est pertinente pour étudier la géométrie de chemins induite, il est naturel de s'intéresser au plan projectif $\mathbb{R}\mathbf{P}^2$. En notant $\mathbb{R}\mathbf{P}^2_*$ l'espace des droites projectives de $\mathbb{R}\mathbf{P}^2$, le projectivisé $\mathbf{P}(\mathrm{T}\mathbb{R}\mathbf{P}^2)$ du fibré tangent s'identifie à l'*espace des drapeaux* $\mathbf{X}=\{(p,D)\mid p\in D\}\subset\mathbb{R}\mathbf{P}^2\times\mathbb{R}\mathbf{P}^2_*$, et le fibré $\mathbf{P}(\mathrm{T}\mathbb{R}\mathbf{P}^2)\to\mathbb{R}\mathbf{P}^2$ correspond par cette identification à la première projection $\pi_\alpha\colon\mathbf{X}\to\mathbb{R}\mathbf{P}^2$. En d'autres termes, la distribution E^α de $\mathbf{P}(\mathrm{T}\mathbb{R}\mathbf{P}^2)$ décrite précédemment s'identifie à $\mathrm{Ker}\,\mathrm{D}\pi_\alpha$ sur $\mathbf{X}$, la distribution E^β étant quant à elle tangente aux fibres de la seconde projection π_β. Nous noterons $\mathcal{L}_\mathbf{X}$ la géométrie de chemins ainsi définie sur $\mathbf{X}$. L'espace de drapeaux $\mathbf{X}$ admet une action transitive du groupe $\mathrm{PGL}_3(\mathbb{R})$ qui préserve la structure $\mathcal{L}_\mathbf{X}$ que nous y avons définie, et $\mathrm{PGL}_3(\mathbb{R})$ est d'ailleurs exactement le groupe d'automorphismes de la géométrie de chemins $\mathcal{L}_\mathbf{X}$ (voir par exemple [MM20, Théorème 4.1.8]).

4.2. **Géométries de Cartan modelées sur l'espace des drapeaux.** Les géométries de chemins constituent un exemple (parmi bien d'autres) de structure géométrique rigide pouvant être décrite par le biais des *géométries de Cartan*.

4.2.a. *De l'espace modèle aux géométries de Cartan.* Cette notion consiste à relier intimement une structure géométrique $\mathcal{S}$ à un *espace homogène modèle* $X=G/P$, muni d'une structure $\mathcal{S}_X$ G-invariante du même type que $\mathcal{S}$ (par exemple, $\mathcal{S}$ et $\mathcal{S}_X$ sont toutes deux des géométries de chemins, ou toutes deux des métriques Riemanniennes). Alors que les (G,X)-structures (voir par exemple [Thu97, Chapter 3] à ce sujet) décrivent les structures $\mathcal{S}$ qui sont localement isomorphes à X, les *géométries de Cartan modelées sur* G/P permettront quant à elles de représenter toutes les structures « infinitésimalement modelées » sur X. L'exemple de l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$, homogène sous l'action des isométries affines, donne un sens très concret à cette affirmation : les géométries de Cartan modelées sur $\mathbb{R}^n$ correspondent exactement aux variétés Riemanniennes, et ces dernières consistent bien en la donnée d'une version infinitésimale, variant d'un espace tangent à l'autre, d'un espace euclidien. Dans notre cas, les géométries de Cartan modelées sur l'espace des drapeaux $\mathbf{X}$ homogène sous l'action de $\mathrm{PGL}_3(\mathbb{R})$, correspondent exactement à l'ensemble des géométries de chemins.

4.2.b. *Courbure d'une géométrie de Cartan.* Cette description serait sympathique mais incomplète si l'on ne pouvait distinguer, parmi les géométries de Cartan modelées sur $X = G/P$, c'est à dire parmi les « versions courbes » de X, celles qui sont localement isomorphes à X. C'est exactement ce que nous fournit la notion de *courbure* d'une géométrie de Cartan, prolongeant en cela celle de courbure Riemannienne : cette courbure s'annule précisément lorsque la géométrie de Cartan correspond à une (G, X)-structure, auquel cas la géométrie est dite *plate*. Les géométries de chemins plates correspondent donc exactement aux $(\mathrm{PGL}_3(\mathbb{R}), \mathbf{X})$-structures, et seront appelées *structures drapeaux*.

Les géométries de Cartan, originellement introduite par Élie Cartan [Car10] se trouvent donc précisément à l'intersection des points de vue de Klein ((G, X)-structures) et de Riemann (métriques Riemanniennes) sur la géométrie, remarque qui guide la très belle exposition des géométries de Cartan donnée dans [Sha97].

4.2.c. *Conséquences géométriques et dynamiques.* Différents travaux ont d'ores et déjà démontré la richesse des outils fournis par les géométries de Cartan pour traiter de problèmes globaux reliant géométrie et dynamique dans divers contextes (voir par exemple, parmi bien d'autres, [MP22, Fra20] au sujet des métriques Lorentziennes et de leurs classes conformes), et dans le cas des difféomorphismes partiellement hyperboliques de type contact, la géométrie de Cartan associée à la géométrie de chemins $\mathcal{L} = (E^s, E^u)$ joue un rôle crucial dans la preuve du Théorème A. Comme je le détaillerai aux paragraphes 7.1 et 7.2, je pense que les méthodes développées dans ce cadre pourraient se montrer fécondes pour l'étude de différentes questions de rigidité des dynamiques (partiellement) hyperboliques à distributions lisses.

4.3. **Géométries de chemins strictes et programme de d'Ambra-Gromov.** Les exemples de difféomorphismes partiellement hyperboliques apparaissant dans le théorème A préservent en réalité plus que la géométrie de chemins enrichie (E^s, E^u, E^c).

4.3.a. *Hiérarchie des géométries de chemins.* Nous avons déjà vu qu'un flot Anosov de contact (φ^t) préserve la 1-forme de contact de noyau $E^s \oplus E^u$ et valant 1 sur $\frac{d\varphi^t}{dt}$. On remarque par ailleurs facilement que les automorphismes affines partiellement hyperboliques de nil-variété préservent également une 1-forme de contact de noyau $E^s \oplus E^u$, et de direction de Reeb E^c. Ceci nous amène à considérer la structure géométrique $\mathcal{T} = (E^\alpha, E^\beta, \theta)$ appelée *géométrie de chemins stricte*, définie par une géométrie de chemins (E^α, E^β) associée à une forme de contact lisse θ de noyau $E^\alpha \oplus E^\beta$. Une telle structure $\mathcal{T}$ contient une géométrie de chemins enrichie sous-jacente $\mathcal{S}_\mathcal{T}$ dont la direction centrale est engendrée par le champ de Reeb X_θ de θ[4], et $\mathcal{S}_\mathcal{T}$ apparaît alors comme une « classe conforme » de structures strictes $\mathcal{T}$. Nous avons désormais défini trois types de structures géométriques en dimension 3, dont la rigidité diminue graduellement et qui contiennent chacune une structure du type suivant par restriction : géométries de chemins strictes $(E^\alpha, E^\beta, \theta)$, géométries de chemins enrichies $(E^\alpha, E^\beta, \mathbb{R}(X_\theta))$, et géométries de chemins (E^α, E^β).

Dans le langage des géométries de Cartan, le modèle homogène à courbure nulle des géométries de chemins strictes est fourni par le groupe d'Heisenberg, alors que le groupe $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ s'interprète comme le modèle « à courbure constante[5] strictement négative ». On peut vérifier que les géométries de chemins strictes compactes à courbure constante positive ont des groupes

4. C'est à dire l'unique champ de vecteurs X_θ tel que $\theta(X_\theta) \equiv 1$, et qui engendre le noyau de $d\theta : d\theta(X_\theta, \cdot) \equiv 0$.

5. Ou plutôt dont la courbure est parallèle (de manière analogue aux variétés Riemanniennes localement symétriques).

d'automorphismes compacts, si bien que les deux familles d'exemples apparaissant dans le théorème A recouvrent précisément les géométries de chemins strictes compactes à courbure constante dont le groupe d'automorphisme est non-compact.

4.3.b. *Rigidité des géométries de chemins strictes.* Si les variétés Riemanniennes compactes ont un groupe d'isométrie compact (selon un théorème de Myers-Steenrod), les structures Riemanniennes conformes fournissent au contraire les premiers exemples de structures géométriques rigides admettant des automorphismes dont la dynamique est non-triviale, à travers les structures conformes des sphères rondes $\mathbf{S}^n$. Le théorème de Ferrand-Obata [Oba71, Fer96] affirme que les sphères $\mathbf{S}^n$ ($n \geq 2$) sont en réalité les seules variétés Riemanniennes fermées dont le groupe de transformations conformes est non-compact. Dans [GD91], D'Ambra et Gromov suggèrent de voir ce résultat comme la manifestation d'un phénomène plus général, selon lequel la coïncidence, pour une structure géométrique rigide, de la compacité de la variété et de la non-compacité de son groupe d'automorphismes devrait être assez rare pour permettre une classification (et un résultat du type de celui de Ferrand-Obata). Le résultat ci-dessous répond positivement au programme de d'Ambra et Gromov pour les géométries de chemins strictes (et implique, en particulier, le théorème 2.1 de Ghys).

Théorème C ([FMMV21, Theorem 1.1])**.** *Soit $\mathcal{T}$ une géométrie de chemins stricte de classe $\mathcal{C}^3$ sur une variété M connexe fermée de dimension trois, dont le groupe d'automorphismes* $\mathrm{Aut}(M,\mathcal{T})$ *est non-compact.*[6] *Alors, modulo revêtements finis et multiplication de la forme de contact par une constante, $(M,\mathcal{T})$ est isomorphe à l'un des exemples apparaissant dans le théorème A.*

5. Structures drapeaux en dimension trois

Nous avons pour le moment observé les fortes contraintes imposées sur une géométrie de chemins enrichie $\mathcal{S} = (E^\alpha, E^\beta, E^c)$ (théorème B) ou stricte $\mathcal{T} = (E^\alpha, E^\beta, \theta)$ (théorème C) par un groupe d'automorphisme manifestant une dynamique riche. Mais qu'en est-il d'une géométrie de chemins $\mathcal{L} = (E^\alpha, E^\beta)$ sans structure supplémentaire : est-il raisonnable d'espérer réaliser pour ces dernières le programme suggéré par d'Ambra et Gromov dans [GD91], et de classifier les géométries de chemins en dimension trois à groupe d'automorphisme non-compact ?

5.1. Automorphismes essentiels de géométries de chemins.

On notera que pour les exemples rencontrés jusqu'ici de géométries de chemins $\mathcal{L}$, il existe toujours une forme de contact θ de noyau $E^\alpha \oplus E^\beta$ telle que le groupe d'automorphismes de la structure stricte $(E^\alpha, E^\beta, \theta)$ soit lui-même non-compact. Il est facile de construire sur $\mathbf{S}^2 \times \mathbf{S}^1$ des géométries de chemins enrichies admettant des automorphismes *non équicontinus* (c'est à dire engendrant un groupe non relativement compact pour la topologie compacte-ouverte), et *non conservatifs* (c'est à dire ne préservant aucune forme volume continue), cette seconde propriété assurant en particulier qu'un tel automorphisme ne peut préserver aucune géométrie stricte associée.

Il est cependant moins facile d'exhiber des exemples de géométries de chemins compactes admettant des automorphismes non-équicontinus et ne préservant aucune distribution transverse à la distribution de contact, c'est à dire ne préservant aucune géométrie de chemins enrichie compatible. Nous appellerons ces automorphismes *essentiels*, par analogie avec les transformations conformes essentielles d'une structure pseudo-Riemannienne conforme, qui ne préservent aucune métrique de la classe conforme (voir par exemple [Fra05] où de tels automorphismes sont construits en signature Lorentzienne). En l'absence de tels automorphismes, on ne détecterait aucun phénomène dynamique spécifique aux géométries de chemins qui les séparerait de leurs analogues enrichies.

6. La version publiée de ce résultat fait l'hypothèse de l'existence d'une orbite dense de ce groupe, mais une révision apportée à la version pré-publiée sur arXiv montre que cette hypothèse est en réalité superflue.

5.2. **Compactifications géométriques de flots géodésiques.** La recherche de nouvelles géométries de chemins admettant des automorphismes non équicontinus et essentiels m'a amené à m'intéresser à la situation suivante. Si Σ est une surface hyperbolique complète, les horocycles stable et instable du plan hyperbolique définissent toujours sur $\mathrm{T}^1\Sigma$ deux champs de droites lisses E^s et E^u de somme contact, qui sont respectivement contracté et dilaté par le flot géodésique de Σ au sens de (2.1) *pour la métrique de Sasaki* sur $\mathrm{T}^1\Sigma$. Mais il essentiel de noter que si Σ est non-compacte, ces estimées ne sont pas une propriété intrinsèque du flot géodésique (g^t) : sur une variété non-compacte, la propriété d'Anosov n'est *pas* indépendante de la métrique.

Il est donc naturel de chercher à compactifier le flot géodésique tout en gardant l'information fournie par la géométrie de chemins (g^t)-invariante $\mathcal{L}_\Sigma = (E^s, E^u)$. Plus précisément, on cherche une variété compacte M où $\mathrm{T}^1\Sigma$ se plonge comme un ouvert, et qui soit munie d'un flot (φ^t) ainsi que d'une géométrie de chemins (φ^t)-invariante $\mathcal{L}$ qui étendent respectivement le flot géodésique (g^t) et la structure $\mathcal{L}_\Sigma$. De plus, $\mathcal{L}_\Sigma$ est plate *i.e.* est une $(\mathrm{PGL}_3(\mathbb{R}), \mathbf{X})$-structure ce que nous appellerons une *structure drapeaux*, et on cherche donc une géométrie de chemins qui soit également une structure drapeaux.

Théorème D ([MM22a, Theorem A])**.** *Soient $g_1, \ldots, g_d$ des éléments hyperboliques de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ de points fixes deux à deux distincts. Alors il existe des entiers $r_i > 0$ tels que l'on ait les résultats suivants concernant la surface hyperbolique $\Sigma = \langle g_1^{r_1}, \ldots, g_d^{r_d} \rangle \backslash \mathbf{H}^2$.*

(1) La géométrie de chemins $(\mathrm{T}^1\Sigma, \mathcal{L}_\Sigma)$ admet une compactification $(M, \mathcal{L})$ qui est une structure drapeaux.

(2) De plus, le flot géodésique de $\mathrm{T}^1\Sigma$ s'étend sur M en un flot d'automorphismes de $\mathcal{L}$, non-équicontinu, non-conservatif et essentiel.

Concernant le programme de d'Ambra et Gromov présenté au paragraphe 4.3, le résultat ci-dessus fournit de nombreux exemples « exotiques » de géométries de chemins compactes à groupe d'automorphisme non-compact, et semble donc indiquer qu'une classification générale de ces dernières est peu probable – et ce même dans le cas de la courbure nulle, *i.e.* des structures drapeaux.

L'existence de la compactification $(M, \mathcal{L})$ repose sur celle d'un ouvert Ω_Γ de l'espace des drapeaux $\mathbf{X}$ admettant une action propre et cocompacte du groupe d'holonomie $\Gamma \subset \mathrm{PGL}_3(\mathbb{R})$ de la structure $\mathcal{L}_\Sigma$ (dont l'action sur $\mathbf{X}$ est de type Schottky). Si l'existence de cet ouvert peut être obtenue comme la conséquence de résultats généraux sur les représentations Anosov dûs à de nombreux auteurs (voir [GW12, KLP18, BPS19]), nous proposons dans [MM22a] une description élémentaire de l'ouvert Ω_Γ dans le cas particulier d'un sous-groupe de Schottky Γ agissant sur l'espace des drapeaux. Une analyse détaillée des motifs dynamiques d'une suite de $\mathrm{PGL}_3(\mathbb{R})$ agissant sur $\mathbf{X}$ nous permet en effet de décrire explicitement un domaine fondamental de l'action de Γ sur Ω_Γ. Cette analyse nous est par ailleurs nécessaire pour décrire la dynamique du flot géodésique compactifié (φ^t), et prouver que ce dernier est non-conservatif et essentiel (voir [MM22a, Theorem A] pour plus de détails sur la dynamique de (φ^t)).

5.3. **Structures drapeaux exotiques en dimension trois.** Toutes les structures drapeaux sur des 3-variétés fermées apparaissant dans la littérature sont *Kleiniennes*, c'est à dire par définition de la forme $\Gamma\backslash\Omega$ avec $\Gamma \subset \mathrm{PGL}_3(\mathbb{R})$ un sous-groupe discret agissant proprement discontinûment et cocompactement sur un ouvert $\Omega \subset \mathbf{X}$. C'est en particulier le cas de tout exemple construit à partir d'une représentation Anosov, ces dernières étant conçues pour agir de la sorte. Il est donc naturel de se demander s'il existe des structures drapeaux *non-Kleiniennes* sur les variétés fermées de dimension 3.

5.3.a. *Nouvelles structures drapeaux non-Kleiniennes.* Il existe essentiellement une unique méthode générale pour construire de nouvelles (G, X)-structures à partir d'une ancienne : le principe de déformation d'Ehresman-Thurston. Ce dernier affirme que toute représentation assez proche de la représentation d'holonomie d'une (G, X)-structure sur une variété fermée M, est encore la représentation d'holonomie d'une certaine (G, X)-structure sur M. Notons que l'une des propriétés principales des représentations Anosov est qu'elles forment un ouvert de l'espace des représentations, si bien que le principe d'Ehresman-Thurston ne permet pas *a priori* de sortir de l'ensemble des structures $\Gamma\backslash\Omega_\Gamma$ obtenues à partir d'un groupe Anosov Γ. Plus généralement, cette méthode ne permet pas automatiquement d'obtenir une structure non-Kleinienne. Le résultat suivant d'existence, obtenu avec Elisha Falbel dans l'article en cours de rédaction [FMM], fournit à l'inverse une méthode de construction d'un grande nombre de structures drapeaux non-Kleiniennes, de topologie essentiellement aussi complexes que souhaitées.

Théorème E ([FMM]). *Soit M une 3-variété fermée munie d'une structure drapeaux :*
- *contenant un ouvert U isomorphe au voisinage d'un bouquet de cercles $\alpha - \beta$ de $\mathbf{X}$,*
- *et dont le groupe d'holonomie contient un élément loxodromique de $\mathrm{PGL}_3(\mathbb{R})$.*

Il existe alors une 3-variété fermée munie d'une structure drapeaux non-Kleinienne et dans laquelle $M \setminus U$ se plonge.

Ce résultat approfondit donc notre compréhension de la nature *géométrique* des structures drapeaux en dimension trois en montrant l'existence de structures « exotiques ». À l'inverse, notre compréhension de la *topologie* des 3-variétés fermées supportant une structure drapeaux est pauvre, et il est donc naturel de chercher à montrer l'existence de structures drapeaux sur des nouvelles classes de 3-variétés fermées. Celle des variétés hyperboliques constitue bien entendu un candidat de choix, et je m'intéresse en collaboration avec Max Riestenberg à la question de l'existence (nous suspectons en l'occurrence leur *in*existence) de structures drapeaux Kleiniennes sur les 3-variétés hyperboliques fermées. Nous essayons pour cela de tirer parti des différents outils fournis par la théorie géométrique des groupes appliquée au groupe fondamental de la variété, et par la connaissance des structures de contact sur les variétés hyperboliques, dans le cadre géométrique spécifique qui est le nôtre. Ce projet très motivant n'a néanmoins pas débouché sur des avancées prometteuses pour le moment, aussi j'ai décidé de ne pas le développer dans la partie projet de recherche de cette présentation.

5.3.b. *Chirurgies de structures drapeaux.* À l'inverse du principe d'Ehresman-Thurston, le théorème E d'existence ci-dessus est un certain sens constructif, et est obtenu grâce à un type particulier de recollement de structures drapeaux que je décris désormais.

Pour les géométries de rang un, comme les structures Riemanniennes conformément plates modelées sur $(\mathrm{PO}(1, n+1), \mathbf{S}^n)$ ou les structures CR-sphériques modelées sur $(\mathrm{PU}(1, n), \partial\mathbf{H}^n_{\mathbb{C}})$, l'existence de dynamiques Nord-Sud pour l'action de tout élément générique permet de munir la somme connexe de deux variétés conformément plates ou CR-sphériques d'une structure géométrique compatible avec chacune des deux « pièces » de la somme connexe. Pour les structure drapeaux modelées sur l'espace des drapeaux $\mathbf{X}$, homogène sous l'action du groupe de rang deux $\mathrm{PGL}_3(\mathbb{R})$, les points attractifs et répulsifs sont remplacés par des bouquets de cercles $\alpha - \beta$ et l'on ne peut donc plus géométriser une simple somme connexe : deux structures drapeaux doivent désormais contenir des voisinages de bouquets de cercles $\alpha - \beta$ pour pouvoir être « sommées ».

Le voisinage d'un tel bouquet a pour bord une surface de genre deux *de type* $\alpha - \beta$, et l'analyse précise faite dans [MM22a] de la dynamique de l'action de $\mathrm{PGL}_3(\mathbb{R})$ sur $\mathbf{X}$ nous permet de construire dans [FMM] une structure drapeaux compatible sur la chirurgie obtenue à partir de deux structures en les recollant le long d'une telle surface de genre deux de type $\alpha - \beta$.

6. Tores de-Sitter singuliers, bi-feuilletages du tore et échanges d'intervalles

La dernière direction – plus récente – de mon travail, concerne les *surfaces Lorentziennes singulières à courbure constante*. Si leur lien avec la dynamique n'est pas clair *a priori*, l'objectif du travail en cours de rédaction dans [MM] est précisément d'expliquer qu'une telle structure géométrique est essentiellement équivalente à deux objets dynamiques : un couple d'*échange d'intervalles* (homographiques par morceaux) d'une part, et un couple de *feuilletages transverses du tore* d'autre part. En ce sens, les résultats de classification F et G ci-dessous peuvent être compris comme des phénomènes de rigidité géométrique d'origine dynamique, et se retrouvent en cela dans la thématique générale de mon travail de recherche.

6.1. Surfaces de-Sitter singulières.

Une *métrique Lorentzienne* g sur une surface S est un champ $\mathcal{C}^\infty$ de formes quadratiques non-dégénérées de signature $(1, 1)$ sur $\mathrm{T}S$. En particulier, g

induit localement sur S deux champs $\mathcal{C}^\infty$ de droites totalement isotropes (*i.e.* en restriction auxquelles g est nulle) dites *de type lumière*, et ces champs de droites sont globalement définis sur un revêtement d'indice au plus 2 de S. En d'autres termes, une métrique Lorentzienne définit sur une surface une paire de *feuilletages lumières* transverses de dimension 1, que l'on appellera le *bi-feuilletage lumière* de la surface. Par conséquent S est de caractéristique d'Euler nulle selon le théorème de Poincaré-Hopf, et le tore $\mathbf{T}^2$ est donc la seule surface fermée orientable et connexe supportant une métrique Lorentzienne. Par ailleurs, un analogue Lorentzien de la formule de Gauss-Bonnet [Dza84] impose à une métrique Lorentzienne à courbure constante sur $\mathbf{T}^2$ d'être de courbure nulle, et un théorème de Carrière [Car89] lui impose alors d'être *complète*, *i.e.* isométrique au quotient $\Lambda\backslash\mathbb{R}^{1,1}$ de l'espace de Minkowski $\mathbb{R}^{1,1} = (\mathbb{R}^2, q_{1,1})$ (avec $q_{1,1}(x,y) = x^2 - y^2$) par un réseau cocompact Λ de $\mathbb{R}^2$.

La construction de métriques Lorentziennes à courbure constante *non-nulle* sur le tore nécessite donc l'introduction de *singularités* inspirées des singularités coniques Riemanniennes, et que nous définissons maintenant.

6.1.a. *Modèle local d'une singularité conique* $\mathbf{dS}^2$. L'espace homogène modèle Lorentzien de courbure constante 1 et de dimension 2, appelé *espace de-Sitter*, est l'hyperboloïde $\mathbf{dS}^2 = q_{1,2}^{-1}(1)$ de l'espace de Minkowski $\mathbb{R}^{1,2} = (\mathbb{R}^3, q_{1,2})$ de dimension 3, muni de la métrique Lorentzienne induite par la forme quadratique $q_{1,2}$.[7] On notera l'analogie avec l'espace hyperbolique $\mathbf{H}^2$ défini comme le paraboloïde $q_{1,2}^{-1}$ du même espace. La composante connexe de l'identité dans le groupe d'isométries de $\mathbf{dS}^2$ est égale à $\mathrm{SO}^0(1,2) \simeq \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R}) = \mathrm{Isom}^0(\mathbf{dS}^2)$, et agit transitivement sur $\mathbf{dS}^2$ avec pour stabilisateurs des groupes à un paramètre hyperboliques. Ainsi $\mathbf{dS}^2$ s'identifie à l'espace homogène $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})/A$, avec $A = \{a^t\}_{t\in\mathbb{R}} \subset \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ le groupe diagonal.

Pour définir le modèle local d'une singularité $\mathbf{dS}^2$, on procède comme dans le cas Riemannien en partant d'un rayon géodésique γ issu d'un point $o \in \mathbf{dS}^2$, que nous supposerons de type lumière pour clarifier la construction (bien que cela ne soit pas nécessaire). On découpe $\mathbf{dS}^2$ le long de γ pour obtenir une surface $\mathbf{dS}^2_*$ contenant $\mathbf{dS}^2 \setminus \gamma$, un point conique o' identifié à o et deux copies « gauche et droite » (pour l'orientation de $\mathbf{dS}^2$) γ_g et γ_d de γ se rejoignant en o'. Le stabilisateur A de o agit sur $\mathbf{dS}^2_*$, et pour $\theta \in \mathbb{R}^*$ on définit le *cône de-Sitter d'angle* θ $\mathbf{dS}^2_\theta$ comme le quotient de $\mathbf{dS}^2_*$ par l'identification $\gamma_g \ni x \sim a^\theta(x) \in \gamma_d$.

Ce quotient admet un point marqué $o_\theta = [o']$, et la métrique de $\mathbf{dS}^2$ passe au quotient sur $\mathbf{dS}^2_\theta \setminus \{o_\theta\}$ (en une métrique Lorentzienne localement isométrique à $\mathbf{dS}^2$). L'*holonomie* pour la $(\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R}), \mathbf{dS}^2)$-structure de $\mathbf{dS}^2_\theta \setminus \{o_\theta\}$ d'un lacet faisant positivement le tour de o_θ est de plus égale à $a^\theta \neq \mathrm{id}$. Ceci montre que la métrique de $\mathbf{dS}^2_\theta \setminus \{o_\theta\}$ ne se prolonge pas en o_θ – qui est donc bien une *singularité* ; et donne de plus une interprétation géométrique de *l'angle* d'une singularité p comme l'unique réel θ tel que l'holonomie autour de p soit conjuguée à a^θ.

Notons que cette même définition fait sens dans l'espace de Minkowski, fournissant une notion analogue de singularité en courbure nulle (voir à ce sujet le paragraphe 8.1).

6.1.b. *Feuilletages lumières d'une surface* $\mathbf{dS}^2$ *singulière.* On appelle naturellement *surface* $\mathbf{dS}^2$ *singulière* une surface S munie d'un ensemble discret $\Sigma \subset S$ de points singuliers et d'une métrique g localement $\mathbf{dS}^2$ sur $S \setminus \Sigma$, qui soit localement isométrique à un espace $\mathbf{dS}^2_\theta$ en chaque point singulier p – θ étant l'*angle* de p. La définition locale d'une singularité permet de remarquer intuitivement que les feuilletages lumières de g sur $S \setminus \Sigma$ se prolongent en deux feuilletages *continus* transverses sur S que nous appelons encore feuilletages lumières.

En particulier, notons que le tore demeure donc la seule surface fermée orientable et connexe supportant une métrique $\mathbf{dS}^2$ singulière pour ce type de singularité. Nous avons donc obtenu de nouvelles géométries, mais une notion de métrique Lorentzienne sur des surfaces fermées de genre > 1 exigera en revanche la considération de nouveaux types de singularités, ce qui est l'objet d'un projet de recherche que je décrirai au paragraphe 8.1.

7. Notons qu'en dimension 2, de-Sitter et son analogue *anti-de-Sitter* de courbure constante -1 sont anti-isométriques et ont donc la même géométrie, si bien que $\mathbf{dS}^2$ est essentiellement la seule géométrie locale Lorentzienne de courbure constante non-nulle.

6.2. **Rigidité des tores de-Sitter singuliers.** Les singularités $\mathbf{dS}^2$ que nous avons décrites sont introduites de manière locale dans [BBS11, §3.3], mais à ma connaissance aucun travail n'avait jusqu'à présent étudié ni même introduit d'exemples globaux de telles surfaces $\mathbf{dS}^2$ singulières.

À l'inverse le cas Riemannien a fait l'objet de nombreux travaux, et Troyanov a classifié dans [Tro86, Tro91] les surfaces Riemanniennes à singularités coniques et courbure constante $K \in \{0, \pm 1\}$. Il prouve en particulier que pour toute surface fermée S, étant fixés un ensemble fini $\{p_i \in S, \theta_i > 0\}$ de points et d'angles [8] ainsi qu'une structure conforme c, il existe sur S une unique [9] métrique à courbure constante K dans la classe conforme c ayant aux points p_i les singularités θ_i. En d'autres termes, pour toute donnée d'angles $\{\theta_i\}$ compatible, l'espace des métriques à courbure constante et singularités fixées d'angles θ_i s'identifie à l'espace de Teichmüller de S. Notons que l'on peut comprendre ce résultat comme une *uniformisation* des surfaces Riemanniennes singulières à courbure constante.

L'article [MM] en cours de rédaction initie l'étude d'une classification analogue des surfaces *Lorentziennes* singulières à courbure constante, en se concentrant pour le moment sur le cas des tores $\mathbf{dS}^2$ ayant une unique singularité. Je présente les principaux résultats obtenus dans ce cadre au paragraphe 6.2.a, et les méthodes apparaissant dans leur étude ainsi que leurs liens avec les échanges d'intervalles au paragraphe 6.2.b. Les cas de multiples singularités, de la courbure nulle, et des surfaces de genre supérieure font l'objet de projets de recherche successifs (et dans cet ordre) dont j'introduirai les principaux enjeux au paragraphe 8.1.

6.2.a. *Rigidité topologique des tores de-Sitter à une singularité.* La question est donc de déterminer l'invariant global qui remplace la structure conforme dans le cas Lorentzien, les angles aux singularités étant fixés. Or deux métriques Lorentziennes conformes g et $e^\rho.g$ (ρ étant une fonction lisse) sur une surface partagent clairement les même droites lumières, et réciproquement on peut facilement vérifier que deux métriques Lorentziennes qui ont les même droites lumières sont conformes. Un analogue aux résultats de Troyanov dans notre cas, assurerait donc « au minimum » que deux métriques $\mathbf{dS}^2$ singulières sur $\mathbf{T}^2$ ayant les mêmes singularités et angles et qui partagent le même bi-feuilletage lumière, sont égales. Le résultat ci-dessous montre que la rigidité est en réalité bien plus forte dans le cas Lorentzien (du moins dans le cas à une singularité), au sens où la dynamique *topologique* de son bi-feuilletage lumière suffit dans de nombreux cas à décrire un tore $\mathbf{dS}^2$ singulier.

Théorème F ([MM])**.** *Soit (S_1, g_1) et (S_2, g_2) deux surfaces $\mathbf{dS}^2$ homéomorphe à $\mathbf{T}^2$ ayant une unique singularité O_1, O_2 du même angle, et telles que :*

- *les feuilletages lumières de g_1 et g_2 sont* minimaux *(*i.e. *ont toutes leurs feuilles denses),*
- *il existe un homéomorphisme $f\colon S_1 \to S_2$ envoyant le bi-feuilletage lumière de g_1 sur celui de g_2.* [10]

Alors (S_1, g_1) et (S_2, g_2) sont isométriques*,* i.e. *il existe un difféomorphisme $\varphi\colon S_1 \to S_2$ tel que $\varphi(O_2) = O_2$ et $\varphi^* g_2 = g_1$ sur $S_2 \setminus \{O_2\}$.*

La restriction sur la dynamique des feuilletages est imposée par le phénomène dynamique suivant. Soit $\mathcal{F}$ un feuilletage de $\mathbf{T}^2$ qui est la suspension d'un difféomorphisme f du cercle n'ayant que deux points fixes répulsifs et attractifs p_- et p_+, *i.e.* $|f'(p_-)| > 1$ et $|f'(p_+)| < 1$ (typiquement, f est une transformation hyperbolique de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ agissant sur $\mathbb{R}\mathbf{P}^1 \simeq \mathbf{S}^1$). Notons que la suspension de p_- (respectivement p_+) crée pour $\mathcal{F}$ une feuille fermée répulsive (resp. attractive), et donc que $\mathcal{F}$ n'est en particulier pas minimal. De plus tout feuilletage $\mathcal{G}$ proche de $\mathcal{F}$ dans la topologie $\mathcal{C}^1$ est la suspension d'un difféomorphisme proche de f dans la topologie $\mathcal{C}^1$. Or les difféomorphismes du type de f (plus généralement les difféomorphismes *Morse-Smale*) ont la propriété d'être topologiquement *structurellement stables* : tout difféomorphisme proche de f lui est $\mathcal{C}^0$-conjugué. Par conséquent, tout feuilletage proche de $\mathcal{F}$ lui est $\mathcal{C}^0$-conjugué. Ceci nous montre qu'une métrique $\mathbf{dS}^2$ singulière g dont les deux feuilletages sont de ce type n'a aucune

8. Vérifiant les conditions nécessaires de compatibilité imposées par la formule de Gauss-Bonnet par rapport au genre de S et à la courbure K.

9. L'aire étant également fixée pour le cas $K = 0$.

10. C'est à dire qui est une équivalence *simultanée* entre les paires de feuilletages lumières.

chance d'être topologiquement rigide, car une métrique proche de g aura son bi-feuilletage lumière topologiquement conjugué à celui de g. [11]

Le théorème F d'unicité ci-dessus, pour être pertinent, doit s'accompagner d'un résultat d'existence. L'énoncé suivant résume l'existence et l'unicité des métriques étudiées par une description de l'*espace de Teichmüller* $\mathcal{T}_\theta(\mathbf{T}^2, \mathbf{0})$ des métriques $\mathbf{dS}^2$ sur $\mathbf{T}^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ ayant une unique singularité d'angle $\theta \in \mathbb{R}^*$ en $\mathbf{0} = [0, 0]$, identifiées modulo isotopies relativement à $\mathbf{0}$.

Théorème G ([MM])**.** *Pour tout* $\theta \in \mathbb{R}^*$ *et* $A_1 \neq A_2 \in ([0\,;1[\cap(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}))^2$*, il existe un unique point* $[g] \in \mathcal{T}_\theta(\mathbf{T}^2, \mathbf{0})$ *dont les feuilletages lumières ont pour* cycles asymptotiques projectifs (A_1, A_2).

Le *cycle asymptotique* $A(x, \varphi^t) \in \mathrm{H}^1(M, \mathbb{R})$ de l'orbite de x pour un flot (φ^t) sur une variété M est un sens « la meilleure approximation possible » en homologie de l'orbite de x par une courbe fermée (voir [Sch57] pour une définition précise). Ce cycle n'existe pas toujours, et dépend en général du point. Ceci étant pour des feuilletages du tore assez réguliers il existe et est constant sur $\mathbf{T}^2$, ce qui donne sens au cycle asymptotique *projectif* (afin qu'il soit indépendant du paramétrage choisi) d'un feuilletage de $\mathbf{T}^2$ dans $\mathbf{P}(\mathrm{H}^1(\mathbf{T}^2, \mathbb{R})) \simeq \mathbb{R}\mathbf{P}^1$ (que nous identifions à $[0\,;1]/(0 \sim 1)$ dans le théorème G pour simplifier l'énoncé). [12] Notons qu'un feuilletage assez régulier du tore est minimal si, et seulement si son cycle asymptotique A est irrationnel, et qu'il est alors topologiquement conjugué au feuilletage linéaire de $\mathbf{T}^2$ induit par la droite $\mathbb{R}(1, A) \subset \mathbb{R}^2$.

6.2.b. *Lien avec les échanges d'intervalles et les difféomorphismes par morceaux du cercle.* J'ai plusieurs fois précisé sans plus de détail dans le paragraphe précédent que les feuilletages du tore considérés devaient être *assez réguliers* pour vérifier certaines propriétés. En effet, certains homéomorphismes du cercle s'illustrent par l'existence d'un ensemble (non-vide, fermé et invariant) minimal *exceptionnel*, *i.e.* homéomorphe à un ensemble de Cantor : ce sont les exemples de Denjoy. Ceci étant, un théorème célèbre dû à Denjoy [Den32] dans le cas $\mathcal{C}^2$ et renforcé par la suite par Herman [Her79, Théorème 5.5], affirme qu'un difféomorphisme f $\mathcal{C}^2$ par morceaux du cercle ne peut avoir d'ensemble minimal, et qu'il est topologiquement conjugué à la rotation $R_\rho\colon [x] \mapsto [x+\rho] \in \mathbf{S}^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ si son nombre de rotation ρ est irrationnel. Si f est $\mathcal{C}^\infty$ et son nombre de rotation *Diophantien*, Herman a montré que f est $\mathcal{C}^\infty$-conjugué à une rotation (répondant à une conjecture de Arnol'd [Arn64]). Pour les applications $\mathcal{C}^\infty$ par morceaux, la régularité de l'application conjuguante est en revanche inconnue en général, le résultat optimal à ce jour [KKM17] ne répondant à la question que dans le cas d'une unique singularité.

Nous avons déjà vu que les feuilletages lumières d'une surface $\mathbf{dS}^2$ singulière sont $\mathcal{C}^0$ sur S (et naturellement $\mathcal{C}^\infty$ sur $S \setminus \Sigma$). Mais plus précisément, leurs *holonomies* partant d'une transversale contenant une singularité sont $\mathcal{C}^\infty$ *par morceaux* (le saut de la dérivée dépendant uniquement de l'angle de la singularité). Le théorème F est un résultat de *rigidité topologique* au sens où une conjugaison topologique entre deux systèmes dynamiques – les bi-feuilletages lumières de g_1 et g_2 – impose l'existence d'une isométrie $\mathcal{C}^\infty$ entre les métriques sous-jacentes (et donc, *a posteriori*, d'une conjugaison $\mathcal{C}^\infty$ entre leurs bi-feuilletages lumières). De ce point de vue ce résultat est similaire dans l'esprit à la question de la régularité de l'application conjuguante entre deux difféomorphismes lisses par morceaux, qui est également une conjecture de rigidité topologique. Le problème de la classification des tores $\mathbf{dS}^2$ singuliers m'a initialement été généreusement suggéré par Selim Ghazouani, dont l'intérêt pour cette question est motivé par son lien conjectural [13] avec celle de la rigidité topologique des difféomorphismes lisses par morceaux.

Le lien des surfaces $\mathbf{dS}^2$ singulières avec les difféomorphismes par morceaux du cercle se fait à travers les échanges d'intervalles homographiques, d'une manière que l'on peut se représenter comme analogue à la représentation d'une surface de translation comme la « suspension » d'un échange d'intervalle classique. Le premier retour d'un des deux feuilletage lumières sur un segment assez grand d'une feuille du second définit en effet un échange d'intervalle à deux parties qui est une homographie par morceaux (venant de la restriction d'éléments de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R}) = \mathrm{Isom}^0(\mathbf{dS}^2)$).

11. Notons que cette explication heuristique, formulée de cette manière, manque un point : bien qu'ils leur soient individuellement conjugués, il n'est pas clair *a priori* que les feuilletages lumières de toute métrique proche de g soient *simultanément* conjugués à ceux de g.

12. Voir par exemple [Yan85] pour plus de détails sur le cycle asymptotique projectif d'un feuilletage de $\mathbf{T}^2$.

13. Qui apparaît déjà sous une forme différente dans [GK22].

Les résultats F et G sont alors obtenus en deux étapes. La première est de représenter explicitement les tores $\mathbf{dS}^2$ *entiers* (en un sens analogue aux surfaces à petits carreaux dans le cadre des surfaces de translations) comme la « suspension » (en un sens à préciser) d'un couple de tels échanges d'intervalles. L'idée est ensuite d'approcher les tores $\mathbf{dS}^2$ à feuilletages lumières minimaux par de telles structures entières. Les échanges d'intervalles en question définissent (par recollement des extrémités de leur intervalle de définition) un homéomorphisme du cercle qui est une homographie par morceaux, et dont la dynamique est intimement reliée à la géométrie de la surface.

Nous présenterons plus en détail au paragraphe 8.1 ci-dessous les deux grandes étapes, géométrique puis dynamique, de la preuve des théorèmes F et G, et nous reviendrons en particulier sur le rôle majeur joué par les échanges d'intervalles qui viennent d'apparaître.

Partie II. Projet de recherche

J'introduis dans cette section mes projets de recherche dans un ordre thématique, dans l'espoir de mettre en avant leurs connexions ainsi que les liens qu'ils entretiennent avec les résultats décrits précédemment.

7. Dynamiques (partiellement) hyperboliques à distributions lisses

7.1. **Rigidité au delà du cas contact.**

Comme nous l'avons vu précédemment dans ce texte, la rigidité imposée sur un système (partiellement) hyperbolique par une forte régularité des distributions stable et instable a été étudiée par le passé sous l'hypothèse que la distribution stable-instable était contact. Nous expliquons tout d'abord dans le paragraphe qui suit l'existence de situations géométriques intermédiaires au delà de ce cas, qui n'ont jusqu'à présent pas été traitées. Nous présentons ensuite deux travaux en cours initiant l'étude de ces situations, dans le cas des flots d'Anosov de dimension 5 et des difféomorphismes partiellement hyperboliques de dimension trois.

7.1.a. *Géométries locales intermédiaires de $E^s \oplus E^u$ entre intégrables et contact.*

Un flot d'Anosov (φ^t) de classe $\mathcal{C}^\infty$ d'une variété fermée M préserve toujours une 1-forme continue λ dite *canonique*, nulle sur $E^s \oplus E^u$ et valant 1 sur le champ de vecteur $\frac{d\varphi^t}{dt}$. Supposons la distribution $E^s \oplus E^u$ de classe $\mathcal{C}^1$ et la variété M de dimension impaire $2n+1$. Cette 1-forme invariante est alors également $\mathcal{C}^1$, ce qui impose automatiquement la dichotomie suivante : la forme continue $\lambda \wedge (d\lambda)^n$ de degré maximal est identiquement nulle ou ne s'annule pas. [14] Le second cas signifie (par définition) que λ est une forme de contact, et dans ce cas si E^s et E^u sont par ailleurs supposées individuellement $\mathcal{C}^\infty$ nous avons vu précédemment que le flot (φ^t) est orbite-équivalent au flot géodésique d'une variété Riemannienne localement symétrique à courbure strictement négative, selon [Ghy87, BFL92]. [15] Par ailleurs, la 2-forme $d\lambda$ est identiquement nulle si, et seulement si la distribution $E^s \oplus E^u$ est intégrable, auquel cas (φ^t) est $\mathcal{C}^0$-orbite équivalent à la suspension d'un difféomorphisme Anosov selon [Pla72, Theorem 3.1].

Si M est de dimension trois, la dichotomie évoquée plus haut sur $\lambda \wedge d\lambda$ signifie simplement que $d\lambda$ est identiquement nulle lorsque λ n'est pas une forme de contact, à savoir que $E^s \oplus E^u$ (lorsqu'elle est de classe $\mathcal{C}^1$) est intégrable lorsqu'elle n'est pas contact. La description précédente de ces deux cas conclut donc la classification des flots d'Anosov de dimension trois à distributions stable et instable $\mathcal{C}^2$: ce sont essentiellement des suspensions ou des flots géodésiques (ce qui est le contenu du Théorème 2.1 de Ghys). Ce cas est, jusqu'à présent dans la littérature, le seul parmi les systèmes (partiellement) hyperboliques pour lequel la situation générale ait été traitée : celle de distributions invariantes lisses sans hypothèse géométrique *a priori* (de type contact notamment) sur la distribution $E^s \oplus E^u$.

Notons de plus que dans ce cas, la raison d'être de cette dichotomie est purement conjoncturelle et *ad hoc* pour les flots d'Anosov de dimension trois. En effet, la dichotomie « $\omega \equiv 0$ ou ω ne

14. Ceci repose essentiellement sur la théorie ergodique des flots d'Anosov dûe à Sinai et Ruelle, appliquée à la mesure à densité continue définie par la $(2n+1)$-forme $\lambda \wedge (d\lambda)^n$ (voir [Bow75, Corollary 4.13, Theorem 4.14] et [Pla72, Lemma 4.2]).

15. Soulignons que la somme $E^s \oplus E^u$ peut en revanche être de classe $\mathcal{C}^1$ et de contact sans que E^s et E^u soient individuellement $\mathcal{C}^1$, comme le montrent les exemples de [FH].

s'annule pas » (avec ω une n-forme invariante sur M^n) est tout d'abord fausse pour les difféomorphismes partiellement hyperboliques. De plus en se restreignant aux flots d'Anosov, à partir de la dimension 5 l'annulation de $\lambda \wedge (d\lambda)^n$ n'impose plus celle de $d\lambda$. Il pourrait par exemple, *a priori*, tout à fait advenir en dimension 5 que $d\lambda$ soit non-nulle sur un ouvert dense de M bien que $d\lambda \wedge d\lambda \equiv 0$. Il y a donc une incertitude sur les géométries locales possibles de la distribution $E^s \oplus E^u$ entre les deux cas extrêmes : intégrable et contact.

7.1.b. *Flots d'Anosov en dimension 5 et formes normales des contractions.* En dehors de ces deux cas, les travaux existant dans la littérature supposent l'existence d'une structure géométrique (φ^t)-invariante additionnelle comme dans [Fan05] (ou se concentrent sur le cas où E^s – ou E^u – est de dimension un comme dans [Sim96]). Il semble cependant raisonnable de penser que les propriétés dynamiques d'un flot d'Anosov sont assez riches pour contraindre la géométrie locale des distributions E^s et E^u lorsque ces dernières sont supposées lisses (et ce sans aucune hypothèse géométrique *a priori*), ouvrant la voie pour commencer à une classification en dimension 5 – ce qui est l'objet d'un projet en collaboration avec Karin Melnick.

Il faut alors voir le couple (E^s, E^u) comme une structure géométrique dont la nature reste à déterminer, une première difficulté étant de trouver un bon cadre géométrique pour étudier ces distributions. Mais la difficulté principale est de montrer que le couple (E^s, E^u) est une structure géométrique *rigide* – au sens où en tout point, l'algèbre de Lie des germes de champs de vecteurs dont le flot local préserve E^s et E^u, est de dimension finie. L'objectif de ce travail étant de faire apparaître la rigidité à partir de la dynamique du flot d'Anosov lui-même, il est naturel de chercher du côté de structures préservées par ce flot en l'absence d'hypothèses de régularité sur ses distributions invariantes, ce qui est offert par la théorie des *formes normales*.

Ces dernières ont fait l'objet de nombreux travaux (depuis Poincaré lui-même), et peuvent être interprétées comme des familles de structures géométriques invariantes sur les feuilles stables ou instables d'un flot Anosov, comme cela est expliqué dans [Fer04]. Elles ont constitué un outil crucial dans la preuve de nombreux résultats de rigidité au sujet des actions Anosov de $\mathbb{Z}^k$ ou $\mathbb{R}^k$ ($k \geq 2$), de celles de réseaux dans les groupes de Lie semi-simples, et des systèmes Anosov uniformément quasi-conformes dans [Sad05]. Les formes normales n'ont en revanche jusqu'à présent pas été utilisées pour étudier les flots d'Anosov à distributions invariantes lisses, et elles constituent le point de départ de notre approche de ce problème dans notre projet en cours avec Karin Melnick.

7.1.c. *Difféomorphismes partiellement hyperboliques en dimension trois.* Dans le cas d'un difféomorphisme partiellement hyperbolique f en dimension trois, la dichotomie « intégrable ou contact » évoquée au paragraphe 7.1.a pour une distribution $E^s \oplus E^u$ de classe $\mathcal{C}^1$ d'un flot Anosov de dimension 3 disparaît drastiquement. L'existence d'une 1-forme de noyau $E^s \oplus E^u$ préservée par f n'est en effet plus automatique.[16]

Malgré cette difficulté inhérente au cas des difféomorphismes, il demeure naturel de chercher à compléter la description entamée par le théorème A en se libérant de l'hypothèse de contact, et en classifiant les difféomorphismes partiellement hyperboliques f en dimension trois dont les trois distributions invariantes E^s, E^c et E^u sont lisses. Un résultat partiel a été obtenu dans cette direction dans [CPRH20], puis précisé dans [AM21] (par des méthodes totalement indépendantes et purement géométriques). Ces résultats font cependant une hypothèse radicale sur le difféomorphisme considéré en supposant sa différentielle *constante* dans un champ de repère bien choisi, et il serait souhaitable de disposer d'une classification sans une telle restriction dynamique *a priori*.

La démarche naturelle est alors de considérer le triplet (E^s, E^u, E^c) comme une structure dont le comportement varie entre un ouvert $O \subset M^3$ où $E^s \oplus E^u$ est de contact, et son complémentaire. Plus précisément, si $E^s \oplus E^u = \operatorname{Ker} \theta$ pour une 1-forme θ (qui n'a aucune raison d'être f-invariante), alors le fermé $M \setminus O$ des points d'annulation de $\theta \wedge d\theta$ ne dépend que de $E^s \oplus E^u$. Le cas où O est vide est celui où $E^s \oplus E^u$ s'intègre en un feuilletage, situation que je laisse provisoirement de côté. Le cas où $O = M$ est traité par le théorème A. Reste celui où O est un ouvert strict et non-vide de M. Aucun exemple de difféomorphisme partiellement hyperbolique de dimension 3 à distributions lisses n'étant connu pour lequel O est non-vide et distinct de M, il est naturel de chercher à exclure cette possibilité.

16. Elle est essentiellement équivalente à supposer l'exposant de Lyapunov central nul.

L'étude de ce problème nécessite tout d'abord de parvenir à décrire précisément la géométrie de $\mathcal{L} = (E^s, E^u)|_O$ sur l'ouvert O *en l'absence de compacité*, ce que j'ai récemment obtenu en raffinant certains des résultats de [MM22b]. Mais la difficulté principale est de croiser cette description avec la dynamique *globale* du difféomorphisme, permettant de comprendre la situation au bord de O (et de montrer *in fine* qu ce dernier doit être vide). J'essaie actuellement d'utiliser les formes normales évoquées au paragraphe 7.1.b pour « globaliser » l'information géométrique obtenue sur O.

7.2. **Difféomorphismes partiellement hyperboliques de contact en dimension supérieure.** La question que nous avons discutée au paragraphe 3.2 en dimension trois fait sens en dimension supérieure : on peut espérer un analogue dans le cas des difféomorphismes partiellement hyperboliques au théorème de [BFL92] pour les flots d'Anosov de contact.

7.2.a. *Structures Lagrangiennes de contact en dimension supérieure.* On s'intéresse donc maintenant aux difféomorphismes partiellement hyperboliques f en dimension (impaire) quelconque *de type contact*, c'est à dire dont les distributions invariantes sont lisses et telles que $E^s \oplus E^u$ est une distribution de contact. Les distributions stable et instable d'un tel difféomorphisme demeurent intégrables, ce qui fait du couple $\mathcal{L} = (E^s, E^u)$ une *structure Lagrangienne de contact* de dimension supérieure. Tout comme en dimension trois, $\mathcal{L}$ peut être décrite comme une géométrie de Cartan, dont l'espace modèle en dimension $2n + 1$ est l'espace $\mathbf{X}_{2n+1}$ des hyperplans projectifs pointés de $\mathbb{R}\mathbf{P}^{n+1}$, homogène sous l'action de $\mathrm{PGL}_{n+2}(\mathbb{R})$. La géométrie de Cartan de $\mathcal{L}$ est d'une aide précieuse pour comprendre f, mais la généralisation à la dimension supérieure de la stratégie de preuve du théorème A est loin d'être immédiate.

En effet, les structures Lagrangiennes de contact manifestent en dimension trois un phénomène exceptionnel : une structure dont le pseudo-groupe d'automorphismes locaux est de dimension au moins 4 en un point y est *plate*, c'est à dire localement isomorphe au modèle $\mathbf{X}_{2n+1}$. De manière équivalente, la courbure de sa géométrie de Cartan y est nulle (ceci est dû à Tresse dans [Tre96], voir également [MM22b, Théorème 3.3]). À l'inverse, il existe en dimension $N > 3$ des structures Lagrangiennes de contact non-plates dont le pseudo-groupe des automorphismes locaux est de dimension $\geq N + 1$. Ceci survient en particulier pour les structures Lagrangiennes de contact (E^s, E^u) préservées par les flots géodésiques des variétés Riemanniennes localement symétriques de courbure strictement négative à partir de la dimension trois.

7.2.b. *Courbures des structures Lagrangiennes de contact.* Pour cette raison, la première étape de mon programme de travail est de commencer par comprendre plus précisément la nature des courbures des structures Lagrangiennes de contact en dimension > 3. Les exemples connus de difféomorphismes partiellement hyperboliques de type contact à distributions $\mathcal{C}^\infty$ sont : d'une part les temps un des flots géodésiques de variétés localement symétriques à courbure < 0, et d'autre part les automorphismes de quotients compacts du groupe d'Heisenberg. La courbure étant nulle dans le cas Heisenberg, la question consiste plus précisément à caractériser algébriquement celle de la structure Lagrangienne de contact (E^s, E^u) préservée par le flot géodésique d'un espace symétrique à courbure < 0. La *courbure* K d'une structure Lagrangienne de contact est un élément d'une représentation linéaire du sous-groupe parabolique $P \subset \mathrm{PGL}_{n+2}(\mathbb{R})$ pour lequel $\mathbf{X}_{2n+1} = \mathrm{PGL}_{n+2}(\mathbb{R})/P$. La dynamique partiellement hyperbolique ainsi que la récurrence assurent par ailleurs qu'en presque tout point, le stabilisateur de K dans P contient un élément dont toutes les valeurs propres sont < 1. Grossièrement, je cherche idéalement à montrer qu'une courbure non-nulle dont le stabilisateur contient de tels éléments doit être celle de la structure préservée par le flot géodésique d'un espace symétrique à courbure < 0.

8. Surfaces Lorentziennes singulières à courbure constante et flots d'Anosov

8.1. **Directions de recherche pour les surfaces Lorentziennes singulières.** Les résultats de classification F et G présentés au paragraphe 6.2 se restreignent au cas des tores $\mathbf{dS}^2$ à une singularité. Je décris dans ce paragraphe tout d'abord les principaux ingrédients de la preuve, afin de dégager la spécificité de cette situation et les enjeux principaux de sa généralisation, et je présente un projet initié avec Selim Ghazouani pour l'étude du cas de plusieurs singularités.

J'esquisse ensuite un programme de travail de long terme sur les aspects géométriques des surfaces Lorentziennes singulières à courbure constante, qui offrent de nombreuses directions de recherche aux perspectives très motivantes.

8.1.a. *Principaux éléments de la preuve et généralisation à plusieurs singularités.* Le cas d'une singularité est naturellement le plus simple, et ce aux deux étapes de la preuve. La première étape de nature géométrique est en un sens un résultat de complétude, montrant que l'on peut se ramener à l'étude de tores $\mathbf{dS}^2$ obtenus à partir de polygones particulièrement simples de $\mathbf{dS}^2$ à côtés lumières par le recollement deux à deux de leurs côtés. Ces recollements se font par une famille explicite $\mathcal{F}$ à deux paramètres de couples d'échanges d'intervalle (E_1, E_2), et la seconde étape, de nature dynamique, consiste essentiellement à montrer que pour tout couple $(\rho_1, \rho_2) \in ([0\,; 1[\cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}))^2$, il existe un unique couple (E_1, E_2) d'échanges d'intervalles dans la famille $\mathcal{F}$ dont les nombres de rotations des homéomorphismes du cercle induits soient (ρ_1, ρ_2).

Concernant la première étape géométrique, l'introduction de nouvelles singularités complique la situation à deux niveaux. Les polygones apparaissant deviennent tout d'abord arbitrairement complexes : cela complique la combinatoire de la situation, mais ne devrait pas poser de problèmes de fond, sinon techniques. Ce qui pourrait *a priori* s'avérer plus problématique serait l'apparition de « tuilages » des polygones, c'est-à-dire d'« incomplétude » des structures – ce qui advient en effet. Le but sera donc de montrer qu'en présence de feuilletages lumières minimaux, les tores $\mathbf{dS}^2$ peuvent une fois de plus être assez bien approchés par des *structures entières*, obtenues par le recollement de polygones sur leurs côtés.

Mais c'est principalement au niveau dynamique qu'un nombre arbitraire de singularités complique drastiquement la situation, et c'est essentiellement cet aspect qui fait la nouveauté du cas des tores $\mathbf{dS}^2$ à plus d'une singularité. Nous avons initié avec Selim Ghazouani l'étude de ce cas, qui est le prolongement naturel du travail en cours de rédaction dans [MM].

8.1.b. *Surfaces Lorentziennes singulières en courbure nulle et en genre supérieur.* Comme nous l'avons vu au paragraphe 6.1, les singularités que nous avons introduites font également sens dans le cas de la courbure nulle, *i.e.* pour l'espace de Minkoswki $\mathbb{R}^{1,1}$. Au delà de l'intérêt géométrique de ce cas très naturel, nous verrons au paragraphe 8.2 que l'application potentielle de résultats de rigidité pour les surfaces Lorentziennes singulières à l'étude des flots d'Anosov de dimension trois nécessitera d'étudier également le cas de la courbure nulle.

Ayant cette même motivation en tête d'une potentielle application aux flots d'Anosov, il serait enfin particulièrement intéressant d'introduire et d'étudier une notion de métrique Lorentzienne singulière à courbure constante sur les surfaces de genre > 1. Comme nous l'avons vu au paragraphe 6.1.b, ceci nécessitera un nouveau type de singularité locale, donnant lieu à des singularités pour les feuilletages lumières qui devraient conjecturalement être du même type que celles des feuilletages invariants d'un difféomorphisme pseudo-Anosov.

8.2. **Surfaces Lorentziennes singulières transverses aux flots d'Anosov.** Comme nous l'avons évoqué précédemment, l'une des motivations pour l'étude de la rigidité des surfaces Lorentziennes singulières à courbure constante est sa potentielle application à l'étude des flots d'Anosov. Nous présentons ci-dessous la conjecture de Ghys dont il est question, et dont nous expliquerons ensuite le lien conjectural avec les surfaces Lorentziennes singulières à courbure constante.

8.2.a. *Presque-équivalence des flots d'Anosov et une conjecture de Ghys.* Un outil précieux pour l'étude des flots en dimension trois est fourni par les *sections de Birkhoff* introduites dans [Bir17], qui sont des surfaces compactes immergées intersectant chaque orbite en temps fini, dont l'intérieur est transverse au flot et dont le bord est l'union d'un nombre fini d'orbites périodiques. Dans [Fri83], Fried montre que tout flot d'Anosov topologiquement transitif de dimension trois admet une section de Birkhoff sur laquelle l'application de premier retour est pseudo-Anosov, et qu'un tel flot est donc presque équivalent à la suspension d'un homéomorphisme pseudo-Anosov – deux flots étant *presque équivalents* si leurs restrictions au complémentaire d'un nombre fini d'orbites périodiques sont topologiquement orbite-équivalentes. On peut de plus décrire précisément les chirurgies qui doivent être effectuées sur ces orbites périodiques pour « désingulariser » la suspension du pseudo-Anosov et passer d'un flot à l'autre (voir par exemple [Sha20] à ce sujet).

Motivé par cette description, une conjecture importante de Ghys est que tous les flots d'Anosov topologiquement transitifs de dimension trois sont *presque commensurables* (*i.e.* presque équivalents à revêtements finis près). Cette conjecture reste largement ouverte, le meilleur résultat dans cette direction étant, à ma connaissance, celui de Dehornoy et Shannon dans [DS19] (voir aussi [Deh13] pour un travail antérieur) prouvant que tous les flots d'Anosov algébriques sont presque équivalents à la suspension de la cat-map $\left(\begin{smallmatrix}2&1\\1&1\end{smallmatrix}\right)$.

8.2.b. *Métriques Lorentziennes singulières et surfaces de Birkhoff.* Comme on l'a vu en détail dans le reste de ce texte, l'existence d'une structure géométrique rigide invariante par un flot d'Anosov est de nature exceptionnelle, et conduit souvent à une conjugaison avec un flot algébrique. L'existence d'une structure géométrique *transversalement* au flot est en revanche moins contraignante, une telle structure n'étant par exemple pas affectée par une reparamétrisation du flot. Cependant, une telle structure transverse demeure parfois suffisante pour obtenir des résultats de classification, comme dans [Ghy92] où Ghys montre, en utilisant une métrique Lorentzienne à courbure constante transverse au flot, qu'un flot d'Anosov de dimension trois préservant un volume et dont les feuilletages faibles sont $\mathcal{C}^\infty$, est $\mathcal{C}^\infty$ équivalent à un flot algébrique. Notons que les courbure 1 et 0 apparaissent toutes deux, la première correspondant aux flots géodésiques et la seconde aux suspensions d'automorphismes du tore. Il est naturel de se demander si les flots d'Anosov topologiquement transitifs de dimension trois peuvent plus généralement être munis d'une métrique Lorentzienne *singulière* à courbure constante transverse au flot, et si l'existence d'une telle structure peut d'une manière analogue mener à des résultats de classification.

Plus précisément, une première direction de ce projet serait de montrer l'existence d'une telle métrique transverse ayant pour feuilletages lumières la traces des feuilletages faibles du flot sur une section de Birkhoff, et pour singularités les orbites périodiques situées au bord de cette section. La motivation pour la construction d'une telle structure est de prouver par la suite qu'une chirurgie appropriée sur les orbites périodiques en question « désingularise » la métrique. Ceci ouvrirait la voie à une stratégie pour étudier la conjecture de Ghys, en utilisant d'une part les méthodes usuelles fournies par une structure (non-singulière) transverse à un feuilletage, et d'autre part la rigidité conjecturée des surfaces Lorentziennes singulières à courbure constante.

Ces directions de travail sont l'objet d'un projet en collaboration avec Pierre Dehornoy et Selim Ghazouani, pour lequel j'ai récemment obtenu un financement dédié de la société Max-Planck pour un séjour long de recherche. Le premier cas de ce travail sera celui des flots d'Anosov ayant des sections de Birkhoff de genre 1 (ce qui comprend les flots géodésiques de tous les orbifold hyperboliques selon [DS19]), auxquels le résultat de rigidité F précédemment présenté pourrait s'appliquer dans le cas d'une unique composante de bord.

Bibliographie

[AM21] Souheib Allout and Kambiz Moghaddamfar. On partially hyperbolic diffeomorphisms in dimension three via a notion of autonomous dynamics. *arXiv :2110.01735 [math]*, October 2021.

[Arn64] V. I. Arnol'd. Small denominators. I : Mapping the circle onto itself. *Izvestiya Akademii Nauk SSSR. Seriya Matematicheskaya*, 25 :21–86, 1964.

[BBS11] Thierry Barbot, Francesco Bonsante, and Jean-Marc Schlenker. Collisions of particles in locally AdS spacetimes. I. Local description and global examples. *Communications in Mathematical Physics*, 308(1) :147–200, 2011.

[BFL92] Yves Benoist, Patrick Foulon, and François Labourie. Flots d'Anosov à distributions stable et instable différentiables. *Journal of the American Mathematical Society*, 5(1) :33–74, 1992.

[Bir17] G. D. Birkhoff. Dynamical systems with two degrees of freedom. *Transactions of the American Mathematical Society*, 18 :199–300, 1917.

[Bow75] Robert Edward Bowen. *Equilibrium states and the ergodic theory of Anosov diffeomorphisms*. Berlin, Allemagne, 1975.

[BPS19] Jairo Bochi, Rafael Potrie, and Andrés Sambarino. Anosov representations and dominated splittings. *Journal of the European Mathematical Society (JEMS)*, 21(11) :3343–3414, 2019.

[Bri75] M. I. Brin. Topological transitivity of one class of dynamic systems and flows of frames on manifolds of negative curvature. *Functional Analysis and Its Applications*, 9(1) :8–16, January 1975.

[Car10] Élie Cartan. Les systèmes de Pfaff, à cinq variables et les équations aux dérivées partielles du second ordre. *Ann. Sci. École Norm. Sup. (3)*, 27 :109–192, 1910.

[Car24] Élie Cartan. Sur les variétés à connexion projective. *Bulletin de la Société Mathématique de France*, 52 :205–241, 1924.

[Car89] Yves Carrière. Autour de la conjecture de L. Markus sur les variétés affines. *Inventiones mathematicae*, 95(3) :615–628, October 1989.

[CP15] Sylvain Crovisier and Rafael Potrie. Introduction to partially hyperbolic dynamics, *Lecture notes* for a minicourse at ICTP, July 2015. Available on the web-pages of the authors.

[CPRH20] Pablo D. Carrasco, Enrique Pujals, and Federico Rodriguez-Hertz. Classification of partially hyperbolic diffeomorphisms under some rigid conditions. *Ergodic Theory and Dynamical Systems*, pages 1–12, October 2020.

[Deh13] Pierre Dehornoy. Almost commensurability of 3-dimensional Anosov flows. *Comptes Rendus. Mathématique. Académie des Sciences, Paris*, 351(3-4) :127–129, 2013.

[Den32] Arnaud Denjoy. Sur les courbes definies par les équations différentielles à la surface du tore. *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées. Neuvième Série*, 11 :333–375, 1932.

[DS19] Pierre Dehornoy and Mario Shannon. Almost equivalence of algebraic Anosov flows, October 2019. arXiv :1910.08457 [math].

[Dza84] Jin Jee Dzan. Gauss-Bonnet formula for general Lorentzian surfaces. *Geometriae Dedicata*, 15 :215–231, 1984.

[Fan05] Yong Fang. Geometric Anosov flows of dimension five with smooth distributions. *Journal of the Institute of Mathematics of Jussieu*, 4(3) :333–362, July 2005.

[Fer96] Jacqueline Ferrand. The action of conformal transformations on a Riemannian manifold. *Mathematische Annalen*, 304(2) :277–291, 1996.

[Fer04] R. Feres. A differential-geometric view of normal forms of contractions. In *Modern dynamical systems and applications. Dedicated to Anatole Katok on his 60th birthday*, pages 103–121. Cambridge University Press, Cambridge, 2004.

[FH] Patrick Foulon and Boris Hasselblatt. Contact anosov flows on hyperbolic 3-manifolds. *Geometry & Topology*, 17(2) :1225–1252.

[FMM] Elisha Falbel and Martin Mion-Mouton. Surgeries of three-dimensional flag structures and non-uniformizable examples. In preparation.

[FMMV21] E. Falbel, M. Mion-Mouton, and J. M. Veloso. Cartan connections and path structures with large automorphism groups. *International Journal of Mathematics*, October 2021.

[Fra05] Charles Frances. Sur les variétés lorentziennes dont le groupe conforme est essentiel. *Mathematische Annalen*, 332(1) :103–119, May 2005.

[Fra20] Charles Frances. Lorentz dynamics on closed 3-manifolds. *Annales Henri Lebesgue*, 3 :407–471, June 2020.

[Fri83] David Fried. Transitive Anosov flows and pseudo-Anosov maps. *Topology*, 22 :299–303, 1983.

[FW80] John Franks and Bob Williams. Anomalous anosov flows. In Zbigniew Nitecki and Clark Robinson, editors, *Global Theory of Dynamical Systems*, Lecture Notes in Mathematics, pages 158–174, Berlin, Heidelberg, 1980. Springer.

[GD91] Mikhail Gromov and Giuseppina D'Ambra. Lectures on transformation groups : geometry and dynamics. *Surveys in differential geometry*, 1991.

[Ghy87] Étienne Ghys. Flots d'Anosov dont les feuilletages stables sont différentiables. *Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure. Quatrième Série*, 20(2) :251–270, 1987.

[Ghy92] Etienne Ghys. Déformations de flots d'Anosov et de groupes fuchsiens. *Annales de l'Institut Fourier*, 42(1-2) :209–247, 1992.

[GK22] S. Ghazouani and K. Khanin. The symplectic structure for renormalization of circle diffeomorphisms with breaks. *Communications in Contemporary Mathematics*, 24(1) :23, 2022.

[GW12] Olivier Guichard and Anna Wienhard. Anosov representations : domains of discontinuity and applications. *Inventiones mathematicae*, 190(2) :357–438, November 2012.

[Her79] Michael Robert Herman. Sur la conjugaison différentiable des difféomorphismes du cercle à des rotations. (On smooth conjugacy of diffeomorphisms of the circle with rotations). *Publications Mathématiques*, 49 :5–233, 1979.

[HP18] Andy Hammerlindl and Rafael Potrie. Partial hyperbolicity and classification : a survey. *Ergodic Theory and Dynamical Systems*, 38(2), April 2018.

[KKM17] Konstantin Khanin, Saša Kocić, and Elio Mazzeo. C^1-rigidity of circle maps with breaks for almost all rotation numbers. *Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure. Quatrième Série*, 50(5) :1163–1203, 2017.

[KLP18] Michael Kapovich, Bernhard Leeb, and Joan Porti. Dynamics on flag manifolds : domains of proper discontinuity and cocompactness. *Geometry & Topology*, 22(1) :157–234, 2018.

[Mañ77] Ricardo Mañé. Quasi-Anosov Diffeomorphisms and Hyperbolic Manifolds. *Transactions of the American Mathematical Society*, 229 :351–370, 1977.

[MM] Martin Mion-Mouton. Rigidity of singular de-Sitter tori with respect to their lightlike foliations. In preparation.

[MM20] Martin Mion-Mouton. *Quelques propriétés géométriques et dynamiques globales des structures Lagrangiennes de contact*. Thèse, Université de Strasbourg, December 2020.

[MM22a] Martin Mion-Mouton. Geometrical compactifications of geodesic flows and path structures. *Geometriae Dedicata*, 217(2) :18, December 2022.

[MM22b] Martin Mion-Mouton. Partially hyperbolic diffeomorphisms and lagrangian contact structures. *Ergodic Theory and Dynamical Systems*, 42(8) :2583–2629, August 2022.

[MP22] Karin Melnick and Vincent Pecastaing. The conformal group of a compact simply connected Lorentzian manifold. *Journal of the American Mathematical Society*, 35(1) :81–122, January 2022.

[Oba71] Morio Obata. The conjectures on conformal transformations of Riemannian manifolds. *Journal of Differential Geometry*, 6(2) :247–258, December 1971. Publisher : Lehigh University.

[Pla72] Joseph F. Plante. Anosov flows. *American Journal of Mathematics*, 94 :729–754, 1972.

[Sad05] Victoria Sadovskaya. On uniformly quasiconformal Anosov systems. *Mathematical Research Letters*, 12(2-3) :425–441, 2005.

[Sal99] François Salein. *Variétés anti-de-Sitter de dimension 3*. Thèse de doctorat, École normale supérieure de Lyon, 1999.

[Sch57] Solomon Schwartzman. Asymptotic cycles. *Annals of Mathematics. Second Series*, 66 :270–284, 1957.

[Sha97] R.W. Sharpe. *Differential geometry : Cartan's generalization of Klein's Erlangen program. Foreword by S. S. Chern.* Berlin : Springer, 1997.

[Sha20] Mario Shannon. *Dehn surgeries and smooth structures on 3-dimensional transitive Anosov flows.* phd-thesis, Université Bourgogne Franche-Comté, September 2020.

[Sim96] Slobodan Simić. Lipschitz distributions and Anosov flows. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 124(6) :1869–1877, 1996.

[Thu97] William P. Thurston. *Three-Dimensional Geometry and Topology, Volume 1 : Volume 1*. Princeton University Press, 1997.

[Tre96] A. Tresse. *Détermination des invariants ponctuels de l'équation différentielle ordinaire du second ordre* $y'' = w(x, y, y')$. Preisschriften gekrönt und hrsg. von der Fürstlich Jablonowskischen gesellschaft zu Leipzig. XXXII. Nr. XIII der mathematische-naturwissenschaftlichen section. S. Hirzel, Leipzig, 1896.

[Tro86] Marc Troyanov. Les surfaces euclidiennes à singularités coniques. (Euclidean surfaces with cone singularities). *L'Enseignement Mathématique. 2e Série*, 32 :79–94, 1986.

[Tro91] Marc Troyanov. Prescribing curvature on compact surfaces with conical singularities. *Transactions of the American Mathematical Society*, 324(2) :793–821, 1991.

[Yan85] Koichi Yano. Asymptotic cycles on two-dimensional manifolds. In *Foliations (Tokyo, 1983)*, volume 5 of *Adv. Stud. Pure Math.*, pages 359–377. North-Holland, Amsterdam, 1985.

Martin Mion-Mouton, Max Planck Institute for Mathematics in the Sciences in Leipzig
Adresse e-mail : martin.mion@mis.mpg.de
Page web : https://personal-homepages.mis.mpg.de/mionmouton/webpage-french.html