Grupos de Holonomia Riemannianos

por

Renan Assimos Martins.

UFRJ

Abril de 2014

FICHA CATALOGRÁFICA

Assimos, R.

Grupos de Holonomia Riemannianos

Renan Assimos Martins.

Rio de Janeiro: UFRJ, IM, 2014.

Dissertação - Universidade Federal do Rio de Janeiro, IM.

1. ...

2. ...

3. ...

4. ...

(Mestrado-UFRJ/IM) Ionel, Lacramioara Marianty

II. Universidade Federal do Rio de Janeiro, III. Título.

No samba ela me disse que rala

No samba eu já vi ela quebrar

No samba ela gostou do rala-rala

Me trocou pela garrafa

Não agüentou e foi ralar

by: Compadre Washington

Grupos de Holonomia Riemannianos

por

Renan Assimos Martins
Orientador: Lacramioara Marianty Ionel

Dissertação de Mestrado submetida, em 8 de Maio de 2014, ao Programa de Pós-graduação do Instituto de Matemática, da Universidade Federal do Rio de Janeiro - UFRJ, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Matemática.

Aprovada por:

Lacramioara Marianty Ionel
IM - UFRJ - Orientador.

Miguel Ángel Javaloyes Victoria
Departamento de Matemáticas - Universidad de Murcia.

Andrew James Clarke
IM - UFRJ.

Graham Andrew Craig Smith
IM - UFRJ.

Cesar Javier Niche Mazzeo
IM - UFRJ - Suplente.

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a minha família, pelo suporte que me tem dado por todos esses anos, além da educação, carinho, respeito, coragem e apoio (parcial) num momento difícil da minha vida, quando eu decidi abandonar a engenharia e começar uma aventura na matemática, depois de já cumprida uma fase chave daquela graduação: o famoso ciclo básico! Sem eles, nem mesmo essas palavras iniciais seriam possíveis (que dirá o resto desse trabalho)!

Agradeço ao meu irmão Rafael Assimos e aos amigos de infância Otto Barcellos, Rodrigo Sales, João Paulo de Freitas Pires (risos), Diego Ferreira da Silva e as suas respectivas famílias atuais (esposa/filhos e etc...), pelos eternos churrascos lá em casa, resgates do João no natal, futebol na quadra, no campo ou no quintal, quando ainda dávamos tamanho para isso! À vocês, meu muito obrigado.

Gostaria de agradecer ao IM-UFRJ, que recebeu de braços abertos (ou não) um "aspirante a engenheiro"que decidiu se aventurar por terrenos mais abstratos e literalmente menos concreto, haja vista eu ser naquela época da engenharia civil. Em especial e em ordem cronológica, gostaria de agradecer ao professor Antônio Roberto da Silva, quem me ensinou, com muita paciência, a provar desde $a.0 = 0\ \forall a \in \mathbb{R}$ ao Teorema de Müntz-Szász, meu trabalho de iniciação científica sob sua orientação ao qual tenho muito orgulho. Não menos importante, gostaria de agradecer a professora Marianty Ionel, que foi minha orientadora no presente trabalho e me fez mergulhar no mundo da geometria e suas variedades, devido ao seu ótimo curso de Geometria Diferencial. Gostaria de agradecer também a professora Stefanella Boatto, que me arrumou excelentes posições de doutorado no exterior, com ótimas bolsas de estudos e com orientadores de renome internacional.

Agradeci ao IM-UFRJ no parágrafo anterior pois foi em sua estrutura física que eu conheci parte dos amigos que hoje habitam a minha lista dos melhores. Dedico portanto esse parágrafo aos amigos do mestrado/doutorado, que compartilharam comigo momentos quase sempre divertidos, de muita cerveja, muita matemática e muuuita conversa. Seria injusto e frio não citar nomes aqui, então gostaria de mandar um abraço aos amigos: Diego Silva Barros (biba quilométrica que se tornou um de meus melhores amigos), Rodrigo Schaeffer (o cruzeirense zangado), Daniel Reis (o cruzeirense estuprador), Henrique Tyrrell (o Élie Cartan Quântico). E também Freddy Castro, Jenniffer Smith, Nelson Borda, Andrés Maurício (o colombiano marica), Davi Obata (Japonês Baiano ou Baiano Japonês?), Rizwan Khan, Márcio Cavalcante (Mc Marcinho), Alexander Arbieto (professor do IM, amigo e mestre Jedi de muitos acima citados), Sara Cristina (mineira, uai!) e, mais recentemente, Gladston Duarte (o Bira) e Vinícius Martins (o paulista de João Pessoa épico que desarmou o ladrão no ônibus), entre muitos outros. Deixando propositalmente por último o agradecimento a Mariana Del Pilar Lizarazo, quem eu conheci também no IM e hoje é minha namorada, fica meu muito obrigado, pois sem você em cima de mim para me fazer estudar/ter vergonha na cara, eu jamais terminaria este trabalho.

Gostaria de agradecer a banca de professores que aceitou participar da minha defesa e ler (ou não) este trabalho gigante e irritante e, em especial, ao professor Andrew Clarke, por seu entusiamo com a matemática e sua dedicação para fazer com que a geometria na UFRJ torne-se cada vez melhor. Nossas conversas sobre holonomia e variedades complexas muito me motivaram em meus planos para o doutorado.

Fugindo do mundo da matemática e adentrando um outro mundo que faz parte da minha vida, quero agradecer aos amigos do Colégio Pedro II, tanto os da unidade Engenho Novo quanto os da Tijuca. Entre os quais, Lucas Pacheco, Alexandre Paiva, Guilherme Aglio, Daniel Antunes, Felipe Labruna, Gustavo Coutinho, Juliana Araújo, Bruno Renault, Diego Costa, Mikaelly Oliveira, Géssica Biscaia e Pedro Carriço. E claro que a todos os outros amigos do CP2 que fizeram parte desta fase incrível da qual eu tenho o maior orgulho! Pedro Segundo tudo ou nada?! Tudo!

Finalmente e não menos importante, agradeço ao CNPQ pelo apoio financeiro.

Resumo

O objetivo principal deste trabalho é estudar os grupos de holonomia de variedades Riemannianas. Como estudar variedades Riemannianas é tão ou mais vago quanto estudar variedades, nossa atenção cairá sobre o estudo dos grupos de holonomia de variedades Riemannianas simplesmente conexas e compactas. O clímax do trabalho é quando apresentamos a demonstração do Teorema de Berger, que a grosso modo classifica o grupo de holonomia de tais variedades.

Para tornar o texto razoavelmente auto-suficiente, fez-se necessário uma apresentação prévia de definições e resultados "básicos"de geometria clássica, como o estudo de fibrados, conexões sobre fibrados principais, entre outros.

Palavras Chaves: Integrais de Haar. Formas de Killing. Fibrados Vetoriais. Fibrados Principais. Grupos de Holonomia. Teorema de Ambrose-Singer. Sistemas de Holonomia. Teorema de Berger. Variedades de Calabi-Yau. Holonomia Excepcional.

Abstract

The main purpose of the present work is to study the holonomy groups of Riemannian Manifolds. As the study of Riemannian manifolds are at least as vague as the study of just Manifolds, our attention will fall on the study of holonomy groups of simply connected and compact Riemannian manifolds. The climax of the work is when we present the proof of Berger's theorem, which roughly classifies the holonomy group of such manifolds.

To make the text reasonably self-sufficient, it was necessary a preview of settings and "basic"results of classical geometry, as the study of bundles, connections on principal bundles, among others.

Key words: Haar Integral. Killing Forms. Vector Bundles. Principal Bundles. Holonomy Groups. Ambrose-Singer's Theorem. Holonomy Systems. Berger's Theorem. Calabi-Yau Manifolds. Exceptional Holonomy.

Conteúdo

Capítulo 0

Introdução

Um objeto de estudos central na geometria Riemanniana do século XX e que ainda persiste com muito vigor nos dias de hoje, são os grupos de holonomia. Entre muitas de suas aplicações atuais, a que vemos com maior frequência e entusiasmo é, certamente, na física teórica, mais especificamente na teoria das cordas supersimétrica e simétrica, onde há uma tentativa de modelar o nosso espaço (inner space) usando as chamadas variedades de Calabi-Yau ou ainda as variedades G_2 (essas últimas, no caso simétrico).

Em 1955, baseado em um estudo prévio de Élie Cartan sobre os subgrupos compactos e conexos de $\mathrm{SO}(n)$, Marcel Berger publicou o artigo "Sur les groupes d'holonomie homogène des variétés à connexion affine et des variétés riemanniennes", citado na bibliografia do presente trabalho, onde ele conseguia, entre outras coisas, dar uma classificação (quase) completa dos possíveis grupos de holonomia de uma variedade Riemanniana compacta, simplesmente conexa, irredutível e não-simétrica (quase completa pois ele obtinha um grupo extra, que dois anos depois foi provado que não poderia estar na presente lista). Apesar da enorme dificuldade técnica do seu resultado, a lista obtida no artigo continha surpreendentemente apenas 7 grupos! O que, é claro, torna o trabalho de uma beleza inacreditável.

Ainda sobre subgrupos compactos e conexos de $\mathrm{SO}(n)$, no artigo "Transformation groups of Spheres"de Montgomery & Samelson (1943), também citado na bibliografia, os autores classificam os subgrupos de $\mathrm{SO}(n)$ que podem agir transitivamente sobre a esfera unitária de dimensão n-1 e, ao olharmos a lista, é notável o fato de que 7 dos 9 grupos dessa lista são os mesmos que aparecem no teorema de Berger. Observado isso, é natural perguntarmos o seguinte: "Os grupos de holonomia, sob as hipóteses de Berger, devem agir transitivamente na esfera unitária?".

No início dos anos 60, James Simons atentou para esse fato e em 1962 ele publicou, no artigo "On the Transitivity of Holonomy Groups", uma demonstração nada trivial dessa pergunta. Somado a isso, uma "ligeira"prova é capaz de excluir os dois grupos restantes da lista de Montgomery & Samelson de serem grupos de holonomia de variedades simplesmente conexas, compactas, irredutíveis e não simétricas, de modo que o resultado de Simon nos dá uma prova alternativa do Teorema de Berger. Mais fácil que a original, mas ainda assim, muito difícil.

O objetivo do presente trabalho é, então, exibir o artigo acima citado de James Simons em sua íntegra e tentando explicar os detalhes ocultos do artigo o máximo possível. Esse será, basicamente o conteúdo do capítulo 3. Além disso, no final tentamos dar um "overview"do que são aqueles grupos do Teorema de Berger e como os matemáticos entendem eles atualmente, além de apontar referências de exemplos famosos e outras coisas. É importante notar que grandes trabalhos em geometria foram feitos so no intuito de dar exemplos de variedades com específicos grupos de holonomia, como o caso das variedades de Calabi-Yau, entre outras.

Ao que se referem os capítulos anteriores do trabalho, não há nada mais sucinto e preciso que defini-los como capítulos que só apresentam linguagem, definições, exemplos e teoremas necessários para o entendimento do restante do texto.

Capítulo 1

Preliminares

Este primeiro capítulo do presente trabalho visa somente apresentar, de maneira introdutória, algumas definições e propriedades básicas de entidades matemática que serão necessárias no decorrer do texto. Os fatos aqui apresentados, no geral, vêm de teorias mais profundas da matemática, de modo que não iremos entrar em grandes detalhes do que aqui será apresentado. Por exemplo, na seção 1, que falaremos sobre integrais de Haar, não apresentaremos a teoria mais geral de grupos localmente compactos e as respectivas integrações sobre tais espaços, apenas os resultados necessários para o trabalho e deixamos a cargo do leitor, caso tenha interesse e julgue o que apresentamos aqui insuficiente, a tarefa deolhar os detalhes mais obscuros desta bonita teoria de integração sobre grupos localmente compactos.

Talvez, começar uma dissertação de mestrado, como esta, com uma seção sobre integração de Haar pode dar ao leitor a impressão de que o texto é extremamente avançado ou que está escrito de uma maneira "seca". Mas, por favor, não tomemos como base para o nosso texto o capítulo 1, pois ele é, como já mencionamos, apenas um capítulo de preliminares. O que nos motiva a iniciar o texto com tal tópico é que usaremos, numa demonstração de um resultado do capítulo 3, uma integral de Haar sobre a componente conexa do normalizador de um grupo compacto, para determinar um certo tensor de curvatura com propriedades desejadas (tudo isso será definido no devido tempo). Logo, com o que apresentaremos agora, temos a esperança de que o leitor veja até uma certa naturalidade no fato de necessitarmos tal tipo de integração (sobre grupos localmente compactos) para obtermos o resultado desejado do capítulo 3.

Depois, na seção 2, falaremos ainda sobre formas de Killing. Assim como na seção anterior, este conceito também será necessário para estabelecer um resultado do capítulo 3. É claro que, a respeito das formas de Killing, também existe uma bela e difícil teoria matemática por trás e, diferentemente da parte de integrais de Haar (que possui um "teorema fundamental"), não apresentaremos grandes resultados sobre essa teoria, só mesmo as principais definições e alguns resultados extremamente aplicáveis aos nossos objetivos. É válido ressaltar que as formas de Killing foram introduzidas na teoria de Álgebras de Lie por Élie Cartan.

1.1 Integrais de Haar

Nosso objetivo, ao falarmos em integrais de Haar, é estabelecer a existência e unicidade (módulo constantes) de uma medida invariante por translações em um grupo localmente compacto. A motivação para obtermos tal resultado vem de uma simples propriedade da integral de Lebesgue definida no espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$: ela é invariante por translações! O que isso que dizer? Ora, seja f uma função real de variável real, por exemplo, e vamos submetê-la à uma translação de valor igual a s, obtendo assim $f(x-s)$. Sabemos, da teoria de integração de Lebesgue, que uma tal função $f(x)$ é Lebesgue integrável se, e somente se, $f(x-s)$ também o é, e além disso

$$\int f(x)dx = \int f(x-s)dx,$$

onde as integrais em questão estão estendidas a toda a reta $\mathbb{R}$. É possível que o leitor esteja se perguntando nesse momento o porquê de uma propriedade aparentemente tão banal ter um papel central no futuro estudo das integrais de Haar. É um fato conhecido que em todo grupo localmente compacto há uma teoria de integração natural, invariante por translações, que constitui uma generalização importante da integral de Lebesgue, i.e., restrita ao $\mathbb{R}^n$, que é um grupo localmente compacto, tal integral não é mais que um múltiplo de Lebesgue.

1.1.1 Definição. *Um **grupo topológico** é um grupo G que, ao mesmo tempo, é um espaço topológico cujas operações de grupo, i.e., as aplicações $(x, y) \mapsto x.y$ e $x \mapsto x^{-1}$, são contínuas. Em tal grupo G, podemos definir translações à esquerda da maneira usual, ou seja, como a aplicação que, dado um $s \in G$, $x \mapsto sx$ e esta aplicação é um homeomorfismo. E como tal homomorfismo aplica a identidade do grupo em s, temos que se V for uma vizinhança da identidade e, então sV será vizinhança de s e isso caracteriza as vizinhanças de s. Diremos ainda que G é **grupo compacto** se G for um grupo topológico que também é um espaço compacto. E analogamente G será dito **grupo localmente compacto** se G for grupo topológico que também é um espaço localmente compacto.*

Esperamos que o leitor esteja familiarizado com os conceitos e resultados básicos sobre a teoria de Variedades Suaves e grupos de Lie(caso contrário, o entendimento do texto tornar-se-á extremamente difícil), de modo que os grupos de Lie podem ser vistos como os principais (ou mais comuns) exemplos de grupos topológicos. Mais que isso, o leitor já deve ter visto que, por exemplo, o grupo ortogonal $O(n) = \{A \in \mathcal{M}_{nxn}; \|Ax\| = \|x\| \ \forall x \in R^n\}$ é um grupo de Lie compacto.

1.1.2 Exemplo. *Seja V um espaço vetorial real de dimensão n. Indiquemos por $A(V)$ o conjunto das transformações afins de V em si mesmo, ou seja, o conjunto das transformações da forma $\tau : V \longrightarrow V$; $x \mapsto v + T(x)$, onde $v \in V$ e $T \in L(V)$. É também conhecido o fato de $A(V)$ ser um espaço de dimensão $n + n^2$ e que, por isso, tem a sua topologia natural que torna contínuas as operações de espaço vetorial e a multiplicação $(x, y) \mapsto x.y$ de elementos de $A(V)$. As transformações afins invertíveis de V constituem um grupo representado por $GA(V)$ e é também um fato conhecido que $GA(V)$ é aberto em $A(V)$ e, portanto, localmente compacto relativamente à topologia induzida. Somando a isso o fato de $GA(V)$ ser grupo topológico relativo à topologia induzida, segue que $GA(V)$ é um exemplo de grupo localmente compacto.*

Vistas essas definições e o pequeno exemplo acima, vamos aos comentários necessários ao futuro estudo das integrais sobre os grupos localmente compactos. É preciso saber que, os grupos de principal importância para nós são os subgrupos de Lie compactos de SO(n), que são grupos de matrizes e assim, não necessariamente comutativos com a operação de multiplicação, donde será necessário distinguirmos as translações à esquerda e à direita (é claro que, feito de um lado, o outro é análogo).

1.1.3 Definição. *Dados um grupo G e um conjunto A, diremos que G **opera à esquerda** no conjunto A^G das funções definidas em G com valores em A se para todo $s \in G$ e $f \in A^G$, a translação à esquerda $s.f$ será a função pertencente à A^G definida por $(s.f)(x) = f(s^{-1}x)$, com $x \in G$. Analogamente defini-se para a direita.*

Definidas dessa maneira, temos algumas propriedades básicas, como por exemplo:

$$e.f = f$$

$$s.(t.f) = (s.t).f$$

$$s.(t.f) = (s.f).t$$

onde e indica a identidade de G, $s, t \in G$ e $f \in A^G$.

1.1.4 Definição. *Uma integral positiva μ num grupo localmente compacto G é dita* ***invariante pelas translações esquerdas*** *ou* ***invariante à esquerda*** *quando, quaisquer que sejam $f \in L(G, \mu)$ e $s \in G$, então $s.f \in L(G, \mu)$ e $\mu(s.f) = \mu(f)$, isto é,*

$$\int f(s^{-1}x)d\mu(x) = \int f(x)d\mu(x).$$

Em particular, se $X \subset G$ for integrável, $s.X$ também o será e $\mu(s.X) = \mu(X)$ qualquer que seja $s \in G$.

É claro que se $f \in \mathcal{K}(G)$, o espaço das aplicações contínuas de G em $\mathbb{R}$, então $s.f \in \mathcal{K}(G)$ $\forall s \in G$. Daí, se μ for integral invariante à esquerda, então $\mu(s.f) = \mu(f)$, com $f \in \mathcal{K}(G)$ e $s \in G$ quaisquer. Reciprocamente se $\mu(s.f) = \mu(f)$, com $f \in \mathcal{K}(G)$ e $s \in G$ quaisquer, então μ é invariante à esquerda, pois o processo pelo qual passamos de $\mathcal{K}(G)$ para $L(G, \mu)$ mostra-nos que se $f \in L(G, \mu)$ e $s \in G$, então $s.f \in L(G, \mu)$ e $\mu(s.f) = \mu(f)$. Isso segue do seguinte lema, com $E = F = G$, $\mu = \nu$ e $T(x) = sx$:

1.1.5 Lema. *Sejam E e F dois espaços localmente compactos, $T : E \longrightarrow F$ um homeomorfismo, μ e ν integrais positivas em E e F, respectivamente, tais que $\mu(fT^{-1}) = \nu(f)$, $\forall f \in \mathcal{K}(F)$. Então para que $f \in L(F, \nu)$ é necessário e suficiente que $fT^{-1} \in L(E, \nu)$ e a igualdade $\mu(fT^{-1}) = \nu(f)$ seja verdadeira para $f \in L(F, \nu)$.*

Demonstração. ver [4].

1.1.6 Definição. *Diz-se que um homeomorfismo T de E, espaço localmente compacto,* ***preserva*** *μ, integral positiva em E, se, para que $f \in L(E, \mu)$, seja necessário e suficiente que $fT^{-1} \in L(E, \mu)$ e assim*

$$\int f(T^{-1}(x))d\mu(x) = \int f(x)d\mu(x)$$

ou, equivalentemente, $\mu(fT^{-1}) = \mu(f)$. Além disso, em virtude do lema (1.1.5), para que $f \in L(E, \mu)$ é necessário e suficiente que $\mu(fT^{-1}) = \mu(f)$ qualquer que seja $f \in \mathcal{K}(E)$.

Devido a isso, podemos caracterizar as integrais positivas que são invariantes à esquerda num grupo localmente compacto como sendo as que são preservadas por todas as translações esquerdas. É claro que se μ for uma integral positiva invariante à esquerda num grupo localmente compacto e $c \in \mathbb{R}_+$, então $c.\mu$ também será uma integral uma integral invariante à esquerda.

O teorema principal desta seção é obviamente:

1.1.7 Teorema. ***(Haar)*** *Em todo grupo localmente compacto G, existe ao menos uma integral positiva $\mu \neq 0$ invariante à esquerda. Uma tal integral μ é única a menos de um fator de proporcionalidade estritamente positiva, i.e., se $\nu \neq 0$ for outra integral positiva invariante à esquerda em G, existe um número real $c > 0$ tal que $\nu = c.\mu$.*

Demonstração. ver [4].

A título de curiosidade, vamos dar um exemplo, onde construiremos uma integral de Haar no grupo GL(V), onde V é um espaço vetorial real de dimensão n. Esse exemplo nos será útil mais a frente, pois simplesmente, se temos uma integral de Haar definida sobre GL(V), não será muito assustador quando falarmos em integral de Haar sobre um subgrupo compacto e conexo de SO(n). Mas primeiramente:

1.1.8 Exemplo. *Seja V um espaço vetorial real de dimensão n. Para obtermos a integral de Haar em V, tomemos uma base $e_1, ..., e_n$ de V qualquer. Seja $I : V \longrightarrow \mathbb{R}^n; I(x) = (x_1, ..., x_n)$, onde $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$, um isomorfismo. É claro que, dada uma função f em V temos que $f \circ I^{-1}$ é uma função em $\mathbb{R}^n$. Nesse caso, vamos considerar as funções f em V tais que $f \circ I^{-1}$ é Lebesgue integrável em $\mathbb{R}^n$ e definir*

$$\mu(f) = \int f(I^{-1}(x_1, ..., x_n))\, \mathrm{d}\, x_1 ... \mathrm{d}\, x_n,$$

onde a integral do lado direito é a integral de Lebesgue do $\mathbb{R}^n$ e, para facilitar notação, vamos escrevê-la como $\displaystyle\int f(x)\, \mathrm{d}\, x_1 ... \mathrm{d}\, x_n$, onde $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$. Ora, as propriedades de invariância da integral de Lebesgue nos garantem então que esta é uma integral de Haar sobre V.

No exemplo anterior, se tivéssemos tomado outra base de V, simplesmente apareceria um produto da integral pelo módulo do determinante da matriz mudança de base para e_i, como consequência do teorema dos jacobianos na mudança de variável.

Agora, para o caso GL(V), temos a necessidade dos seguintes resultados, cujas provas também se encontram em [4].

1.1.9 Proposição. *Se $T \in GL(V)$, para que uma função real f em V seja integrável relativamente a uma integral de Haar $\mathrm{d}\,x$ em V é necessário e suficiente que fT^{-1} também o seja e, então,*

$$\int f(T^{-1}(x))\,\mathrm{d}\,x = |\det(T)|.\int f(x)\,\mathrm{d}\,x.$$

1.1.10 Proposição. *Se V for um espaço vetorial real de dimensão n e $A \in L(V)$, então $\det(E_A) = \det(D_A) = (\det(A))^n$, onde as aplicações acima são definidas por: $E_A(X) = AX$ e $D_A(X) = XA$, $\forall X \in L(V)$ (multiplicação à esquerda e à diretia por A, respectivamente).*

1.1.11 Exemplo. *Consideremos o espaço GL(V) das transformações lineares invertíveis de V, com V espaço vetorial de dimensão n e vamos determinar suas integrais de Haar. Vamos denotar por T um ponto qualquer de L(V) e por $\mathrm{d}\,T$ uma integral de Haar em L(V), como no exemplo anterior. Vamos considerar também a integral induzida sobre $G = GL(V)$ (simplificando a notação), pois G é aberto em L(V), como sabemos dos cursos básicos de análise. A ideia é tentarmos determinar uma função real contínua* u, *definida em G, de modo que*

$$\mu(f) = \int_G u(T)f(T)\,\mathrm{d}\,T, \text{ onde } f \in \mathcal{K}(G)$$

seja uma integral de Haar invariante à esquerda em G. Mas para isso, devemos ter $\mu(Sf) = \mu(f)$, $\forall S \in G$ e $\forall f \in \mathcal{K}(G)$, i.e.,

$$\int_G u(T)f(S^{-1}T)\,\mathrm{d}\,T = \int_G u(T)f(T)\,\mathrm{d}\,T.$$

Estendendo essa função u *à L(V) como sendo zero sempre que $T \notin G$ e escrevendo $u(T)f(S^{-1}T) = u(SS^{-1}T)f(S^{-1}T)$ e aplicando as proposições acima, temos a seguinte igualdade*

$$|\det(S)|^n \int_G u(ST)f(T)\,\mathrm{d}\,T = \int_G u(T)f(T)\,\mathrm{d}\,T.$$

Logo, nos resta encontrar uma função u *que satisfaça a equação $|\det(S)|^n u(ST) = u(T)$, $\forall S, T \in G$. Nesse caso, pondo $S = T^{-1}$, temos $c = u(I)$, com I matriz identidade,* *e consequentemente* $u(T) = \dfrac{c}{|\det(T)|^n}$. *Por outro lado, é óbvio que tal função satisfaz a igualdade desejada.*

Assim, uma integral de Haar invariante à esquerda em G *se exprime por*

$$\mu(f) = \int_G \frac{f(T)}{|\det|^n} \, \mathrm{d}\, T$$

Analogamente, encontramos uma integral de Haar invariante à direita em G.

Isso conclui os nossos exemplos e o nosso estudo básico sobre as integrais de Haar que, conforme dito, foi breve porém suficiente para nossos fins.

1.2 Formas de Killing

Nesta seção vamos introduzir brevemente os conceitos de representação adjunta de uma álgebra de Lie e de formas de Killing. Faremos as definições e apresentaremos os resultados necessários, com provas referenciadas, até chegarmos ao chamado critério de Cartan, que estabelece quando uma álgebra de Lie é semi-simples ou não.

O conteúdo neste capítulo apresentado é baseado no livro [8], que é um excelente material não só para as formas de Killing quanto para os resultados básicos sobre representação de grupos que são necessários para este trabalho.

1.2.1 Definição. *Dizemos que uma álgebra de Lie é **solúvel** se exite uma sequência de subálgebras* $\mathfrak{a}^0 = \mathfrak{g} \supset \mathfrak{a}^1 \supset \mathfrak{a}^2 \subset ... \supset \mathfrak{a}^k = \{0\}$*, tais que* $\mathfrak{a}^i$ *é um ideal em* $\mathfrak{a}^{i-1}$ *e* $\mathfrak{a}^{i-1}/\mathfrak{a}^i$ *é abeliano.*

Note que tal definição não difere em nada do que conhecemos da teoria geral de álgebras e ideais, a única diferença é que, para nós, $\mathfrak{g}$ é uma álgebra de Lie.

1.2.2 Definição. *Uma álgebra de Lie* $\mathfrak{g}$ *é chamada semi-simples se ela não contém ideias solúveis (a menos do* $\{0\}$*). Além disso,* $\mathfrak{g}$ *é simples se ela não é abeliana e seus únicos ideais são* $\{0\}$ *e* $\mathfrak{g}$.

Embora tenhamos assumido que o leitor esteja familiarizado com a teoria das representações de grupos, não custa relembrarmos uma simples definição.

1.2.3 Definição. *Seja* X *um elemento de* $\mathfrak{g}$*. Define-se a ação adjunta de* X *em* $\mathfrak{g}$ *como a aplicação* $\mathrm{ad}_X : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}$*;* $\mathrm{ad}_X(Y) = [X, Y]$*. Também denotamos* $\mathrm{ad}_X(Y)$ *por* $\mathrm{ad}\, X.Y$*. Além disso, também podemos definir a aplicação linear* $\mathrm{ad} : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}$*, que associa a cada* $X \in \mathfrak{g}$ *a aplicação* ad_X *e esta é uma representação da álgebra de Lie* $\mathfrak{g}$ *chamada de **representação adjunta** da álgebra.*

Agora vamos ao nosso objeto de interesse, que são as formas bilineares sobre álgebras de Lie e, posteriormente, as formas de Killing.

1.2.4 Definição. *Uma forma bilinear B sobre uma álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ é chamada de* ***invariante*** *se*

$$B(\operatorname{ad} X.Y, Z) + B(Y, \operatorname{ad} X.Z) = 0$$

com $X, Y, Z \in \mathfrak{g}$.

1.2.5 Proposição. *Seja V uma representação de $\mathfrak{g}$, uma álgebra de Lie, e defina a seguinte forma bilinear sobre $\mathfrak{g}$:*

$$\mathrm{B}_V(x, y) = \mathrm{tr}_V(\rho(x), \rho(y)).$$

Então B_V é uma forma simétrica, bilinear e invariante sobre $\mathfrak{g}$.

Demonstração. ver [8]

Obs: Na proposição acima, ρ é a representação da álgebra de Lie, onde as definições e detalhes estão em [8].

Um caso especial de extrema importância, em relação à proposição acima é quando tomamos V como sendo a representação adjunta da álgebra de Lie $\mathfrak{g}$.

1.2.6 Definição. *A forma de Killing é a seguinte forma bilinear sobre $\mathfrak{g}$:*

$$\mathrm{K}(x, y) = \mathrm{tr}_V(\mathrm{ad}(x), \mathrm{ad}(y)).$$

Segue diretamente da proposição anterior que a forma de Killing é simétrica e invariante sobre $\mathfrak{g}$. Agora, vamos enunciar dois teoremas, ambos conhecidos como critérios de Cartan, que mostram que o fato da forma de Killing de $\mathfrak{g}$ ser não-degenerada e $\mathfrak{g}$ ser semi-simples estão intimamente relacionados.

1.2.7 Teorema. ***(Critério de solubilidade de Cartan)*** *A álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ é solúvel se, e somente se, $K([\mathfrak{g}, \mathfrak{g}], \mathfrak{g}) = 0$, i.e., $K(x, y) = 0$ para quaisquer que sejam $x \in [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}],\ y \in \mathfrak{g}$.*

1.2.8 Teorema. ***(Critério de semi-simplicidade de Cartan)*** *A álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ é semi-simples se, e somente se, a forma de Killing sobre $\mathfrak{g}$ for não-degenerada.*

Demonstração. Para ambos, ver [8].

1.3 Alguns Comentários

Nesta seção, não haverá qualquer conteúdo matemático propriamente dito. Vou apenas citar os tópicos que eu julgo extremamente necessários para o entendimento do que virá à frente no trabalho e também o que é desejável o leitor saber; embora, é claro, possamos simplesmente aceitar alguns dos fatos que não estão demonstrados no trabalho, mas referenciados, cuja a demonstração demandaria toda a introdução de uma nova teoria e tudo mais.

Inicialmente, por se tratar de um trabalho de geometria diferencial, um conhecimento prévio sobre variedades diferenciável, grupos e álgebras de Lie e suas representações é extremamente fundamental. Para tal, eu recomendaria o excelente livro de John M. Lee - An Introduction to Smooth Manifolds - Graduate Texts in Mathematics, Springer. Já para a parte de teoria das representações de grupos, o texto de William Fulton e Joe Harris - Theory of Representation: A First Course, é suficiente.

É também necessário estar familiarizado com os conceitos básicos da Geometria Riemanniana, como as definições e propriedades básicas de métricas Riemannianas, conexões e tensores de curvatura. Acreditamos que neste texto, as definições acima citadas e suas propriedades básicas no contexto dos fibrados vetoriais e principais estão razoavelmente suficientes, embora, na opinião de quem vos fala, essas definições, vistas logo da maneira geral nos fibrados vetoriais e principais, podem ser complicada e não dar ao leitor exatamente a ideia geométrica do que, de fato, se tratam tais objetos. Para as definições mais gerais, o livro de Kobayashi e Nomizu acima citado tem conteúdo mais que necessário. Já para ver as definições num contexto menos geral e mais intuitivo, existem os excelentes textos de John M. Lee - Riemannian Manifolds: An introduction to curvature - Graduate Texts in Mathematics, Springer e de Manfredo do Carmo - Riemannian Geometry - Birkhäuser.

A outra parte interessante, mas já não tão fundamental (pois pode ser consultada ou assumida), é a parte de espaços simétricos e suas propriedades. Para tal, recomendo o livro de Sigurdur Helgason - Differential Geometry, Lie Groups and symmetric spaces.

Capítulo 2

Conexões, Curvatura e Grupos de Holonomia

É importante ressaltar que nas primeiras quatro seções deste capítulo, com exceção de algumas contas, especificamente as que foram feitas na subseção sobre propriedades extras do transporte paralelo, seguimos o conteúdo como foi exibido no livro de D. Joyce [10], que simplesmente trás a teoria e os resultados necessários e suficientes para os nossos objetivos de estudos desejados. Logo o crédito das primeira seções desse trabalho devem ser cogitados ao seu excelente livro, pois eu só incluí as contas dos detalhes que julguei mais obscuros.

O intuito de começar com todas definições de conexões e curvatura em fibrados principais é para provar o teorema de redução, que depois será importante na demonstração do teorema de Ambrose-Singer, uns dos mais importantes resultados do texto.

A parte do teorema de Ambrose-Singer também não está contida no livro de Joyce, de modo que ela foi tirada do artigo original somado à alguns comentários e passagens do livro de Kobayashi e Nomizu, [11].

Finalmente, terminamos o capítulo definindo e enunciando os resultados necessários sobre grupos de holonomia Riemannianos para intuirmos o nosso desejado Teorema de Berger. Não apresentamos muitas demonstrações nessa seção para não desvirtuar ainda mais o leitor do foco do trabalho, a prova do Teorema de Berger.

2.1 Fibrados, Conexões e Curvatura

Vamos definir e estudar os principais resultados, na direção dos nossos objetivos, de conexões e suas curvaturas. Vamos apresentar a definição de conexão tanto em fibrados principais quanto em fibrados vetoriais e esperamos entender como essas duas definições, no final, podem ser entendidas de modo geometricamente similar.

2.1.1 Fibrados Principais e Fibrados Vetoriais

2.1.1 Definição. *Seja M uma variedade diferenciável. Um* ***fibrado vetorial*** *E sobre M é um fibrado cujas fibras são espaços vetoriais (reais ou complexos). Isto é, E é uma variedade diferenciável equipada com uma projeção suave $\pi : E \longrightarrow M$ e existe uma vizinhança aberta U_m de m tal que $\pi^{-1}(U_m) \cong U_m \times V$, onde V é uma fibra de E.*

2.1.2 Definição. *Seja M uma variedade diferenciável e G um grupo de Lie. Um* ***fibrado principal*** *P sobre M com fibra G é uma variedade diferenciável P equipada com uma projeção suave $\pi : P \longrightarrow M$ e uma G-ação sobre P, que vamos escrever como $p \overset{g}{\longmapsto} g.p$, for $g \in G$ e $p \in P$. Esta G-ação tem que ser suave e livre, assim como a projeção $\pi : P \longrightarrow M$ tem que ser uma fibração, i.e., ter como fibras as órbitas da G-ação e tais que para cada $m \in M$ a fibra $\pi^{-1}(m)$ seja uma cópia de G.*

Pretendemos explicar neste parágrafo as semelhanças entre fibrados principais e vetoriais e como "transladar"algumas ferramentas de um para o outro. Primeiramente, vamos ver uma maneira de como ir de fibrados vetoriais para fibrados principais.

2.1.3 Definição. *Sejam M uma variedade diferenciável e $E \longrightarrow M$ um fibrado vetorial com fibra $\mathbb{R}^k$. Definimos então a seguinte variedade:*

$$F^E = \{(m, e_1, ..., e_k); m \in M \text{ e } (e_1, ..., e_k) \text{ sejam uma base para } E_m\}$$

Defina também $\pi : F^E \longrightarrow M$ por $\pi : (m, e_1, ..., e_k) \longmapsto m$. Para cada $A = (A_{ij})$ em $GL(k, \mathbb{R})$ e $(m, e_1, ..., e_k)$ em F^E, defina $A.(m, e_1, ..., e_k) = (e'_1, ..., e'_k)$, onde $e'_i = \sum_{j=1}^k A_{ij} e_j$. Isto nos dá uma G-ação de $GL(k, \mathbb{R})$ sobre F^E, que faz de F^E um fibrado *principal sobre M, com fibra $GL(k,\mathbb{R})$. Vamos chamar F^E de fibrado referencial de E (no inglês, esse fibrado tem o nome de frame bundle)*

Também é possível "passar" de um fibrado principal para um fibrado vetorial, pela seguinte definição

2.1.4 Definição. *Suponha que M é uma variedade diferenciável e P um fibrado principal sobre M com fibra G, um grupo de Lie. Seja ρ a representação de G sobre o espaço vetorial V. Então G age sobre o espaço produto $P \times V$ com fibrado principal agindo sobre o primeiro fator e ρ sobre o segundo. Defina $\rho(P) = (P \times V)/G$, o quociente de $(P \times V)$ por esta G-ação. Agora $P/G = M$, então o mapa de $(P \times V)/G$ para P/G será uma projeção de $\rho(P)$ para M. Como G age livremente sobre P, esta projeção tem fibra V, e assim $\rho(P)$ é um fibrado vetorial sobre M, com fibra V.*

Estas duas últimas definições servem para ilustrar o fato de fibrados principais serem mais gerais do que fibrados vetoriais, pois se ρ é a projeção canônica de $GL(k,\mathbb{R})$ sobre $\mathbb{R}^k$ então $E \cong \rho(F^E)$. Isto, por sua vez, nos dá uma correspondência 1-1 entre fibrados vetoriais sobre M com fibra $\mathbb{R}^k$ e fibrados principais sobre M com fibra $GL(k,\mathbb{R})$. Mas qualquer grupo de Lie G pode ser a fibra de um fibrado principal, de modo que fibrados principais são, de fato, mais gerais que os vetoriais.

2.1.2 Conexões sobre Fibrados Vetoriais e Principais

2.1.5 Definição. *Sejam M uma variedade diferenciável e $E \longrightarrow M$ um fibrado vetorial. Uma conexão ∇^E sobre E é uma aplicação linear $\nabla^E : C^\infty(E) \longrightarrow C^\infty(E \otimes T^*M)$ satisfazendo a condição*

$$\nabla^E(\alpha e) = \alpha \nabla^E e + e \otimes d\alpha$$

sempre que $e \in C^\infty(E)$ é uma seção suave de E e α uma função suave sobre M. Se ∇^E é uma tal conexão, $e \in C^\infty(E)$, e $v \in C^\infty(TM)$ é um campo vetorial, então escrevemos $\nabla^E_v e = v.\nabla^E e \in C^\infty(E)$, onde "." contrai os fatores v e de $\nabla^E e$ de TM e T^*M juntos. Então se $v \in C^\infty(TM)$, $e \in C^\infty(E)$ e α, β são funções suaves sobre M, nós temos

$$\nabla^E_{\alpha\beta}(\beta e) = \alpha\beta\nabla^E_v e + \alpha(v.\beta)e. \tag{2.1}$$

Aqui $v.\beta$ é a derivada de Lie de β por v. Ela é uma função suave sobre M e poderia ser escrita como $v.d\beta$.

Suponha que E é um fibrado vetorial sobre M com fibra $\mathbb{R}^k$ e sejam $e_1, ..., e_k$ seções suaves de E sobre algum conjunto aberto $U \subset M$, que forma uma base de E a cada ponto de U. Então toda seção suave de E sobre U pode ser escrita de maneira única como $\sum_{i=1}^{k} \alpha_i e_i$, onde $\alpha_1, ..., \alpha_k$ são funções suaves sobre U. Sejam também $f_1, ..., f_k$ seções suaves quaisquer de $E \otimes T^*M$ sobre U, e defina

$$\nabla^E \Big[\sum_{i=1}^{k} \alpha_i e_i \Big] = \sum_{i=1}^{k} (\alpha_i f_i + e_i \otimes \mathrm{d}\alpha_i) \tag{2.2}$$

para todas as funções suaves $\alpha_1, ..., \alpha_k$ sobre U. Então ∇^E é uma conexão em E sobre U. Mais que isso, toda conexão em E sobre U pode ser escrita unicamente deste modo.

Para o intuito do nossa trabalho, precisamos, além da definição de conexão, definir o que seria a **curvatura** de uma conexão sobre um fibrado vetorial. É válido lembrarmos, pois usaremos na definição de curvatura, que dada uma variedade diferenciável M e um fibrado vetorial E sobre M, $\mathrm{End}(E) = E \otimes E^*$ denotam os endomorfismos de E, onde E^* é o dual de E.

2.1.6 Proposição. *Sejam M uma variedade diferenciável, E um fibrado vetorial sobre M e ∇^E uma conexão em E. Suponha que $v, w \in C^\infty(TM)$ são campos vetoriais, $e \in C^\infty(E)$ e α, β, γ sejam funções suaves sobre M. Então*

$$\nabla^E_{\alpha v} \nabla^E_{\beta w}(\gamma e) - \nabla^E_{\beta w} \nabla^E_{\alpha v}(\gamma e) - \nabla^E_{[\alpha v, \beta w]}(\gamma e) = \alpha\beta\gamma . \{ \nabla^E_v \nabla^E_w e - \nabla^E_w \nabla^E_v e - \nabla^E_{[v,w]} e \}, \tag{2.3}$$

onde $[v, w]$ é o colchete de Lie. Assim a expressão $\nabla^E_v \nabla^E_w e - \nabla^E_w \nabla^E_v e - \nabla^E_{[v,w]} e$ é "linear"em v, w e e (no sentido de se multiplicar por uma função suave, então mantém-se uma linearidade neste fatores). Esta expressão é também claramente anti-simétrica em v e em w. Assim existe uma única seção suave $R(\nabla^E) \in C^\infty(End \otimes \Lambda^2 T^*M)$ chamada de curvatura de ∇^E, que satisfaz a equação

$$R(\nabla^E).(e \otimes v \wedge w) = \nabla^E_v \nabla^E_w e - \nabla^E_w \nabla^E_v e - \nabla^E_{[v,w]} e \tag{2.4}$$

para todo $v, w \in C^\infty(TM)$ e $e \in C^\infty(E)$.

Demonstração. Se $v, w \in C^\infty(TM)$ e α, β são funções suaves sobre M, então $[\alpha v, \beta w] = \alpha\beta[v, w] + \alpha(v.\beta)w - \beta(w.\alpha)v$. Usando isto e a equação (2.1) para expandir os termos do lado esquerdo de (2.3), vemos que

$$\nabla^E_{\alpha v}\nabla^E_{\beta w}(\gamma e) = \alpha\beta\gamma\nabla^E_v\nabla^E_w e + \alpha\beta(w.\gamma)\nabla^E_v e + \{\alpha\beta(v.\gamma) + \alpha(v.\beta)\gamma\}\nabla^E_w e +$$

$$\{\alpha(v.\beta)(w.\gamma) + \alpha\beta(v.(w.\gamma))\}e,$$

$$\nabla^E_{\beta w}\nabla^E_{\alpha v}(\gamma e) = \alpha\beta\gamma\nabla^E_w\nabla^E_v e + \{\alpha\beta(w.\gamma) + (w.\alpha)\beta\gamma\}\nabla^E_v e + \alpha\beta(v.\gamma)\nabla^E_w e$$

$$+\{(w.\alpha)\beta(v.\gamma) + \alpha\beta(w.(v.\gamma))\}e,$$

$$\nabla^E_{[\alpha v, \beta w]}(\gamma e) = \alpha\beta\gamma\nabla^E_{[v,w]}e - (w.\alpha)\beta\gamma\nabla^E_v e + \alpha(v.\beta)\gamma\nabla^E_w$$

$$+\{\alpha\beta([v, w].\gamma) + \alpha(v.\beta)(w.\gamma) - (w.\alpha)\beta(v.\gamma)\}e.$$

Combinando estas equações com a identidade $v.(w.\gamma) - w(v.\gamma) = [v, w].\gamma$ e depois cancelando os termos repetidos, nós chegamos a equação (2.3) e a proposição está provada $\square$(Proposição (2.1.6))

Agora faz sentido fazermos a seguinte definição, para formalizar o que apareceu no enunciado da proposição anterior:

2.1.7 Definição. *Seja ∇^E uma conexão sobre E. Então a curvatura $R(\nabla^E)$ da conexão ∇^E é uma seção suave do fibrado vetorial $End(E) \otimes \Lambda^2 T^*M$, cuja existência é garantida pela proposição acima.*

Uma maneira interessante de entendermos a curvatura de ∇^E é tomarmos um sistema de coordenadas locais $(x_1, ..., x_n)$ sobre M e definir $v_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$ para $i = 1, ..., n$. Então v_i é um campo vetorial sobre M e $[v_i, v_j] = 0$. Seja também e uma seção suave de E, como de costume. Então podemos interpretar $\nabla^E_{v_i} e$ é como uma espécie de derivada parcial $\frac{\partial e}{\partial x_i}$ de e. Abusando um pouquinho dessa notação de derivadas parciais, a equação (2.4) nos diz que

$$R(\nabla^E).(e \otimes v_i \wedge v_j) = \frac{\partial^2 e}{\partial x_i \partial x_j} - \frac{\partial^2 e}{\partial x_j \partial x_i} \tag{2.5}$$

Embora saibamos que as derivadas parciais de funções sobre a variedade (esse fato é consequência do fato de ser verdade para $\mathbb{R}^n$) comutam, i.e., $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$, isto não é verdade quando tratamos de seções suaves de E. Então o que a equação (2.5) nos mostra é que $R(\nabla^E)$ mede, de alguma maneira, **quanto** essas derivadas parciais em E falham em comutar.

Agora uma pergunta bastante natural depois de termos introduzido a noção de fibrados principais é: "Faz sentido definirmos essa tal curvatura para esse tipo de fibrado? E em caso afirmativo, como seria essa definição?"

Para isso, suponha inicialmente que P é um fibrado principal sobre uma variedade diferenciável M com fibra G, um grupo de Lie, e projeção $\pi : P \longrightarrow M$. Seja $p \in P$ e defina $m = \pi(p)$. Então a derivada de π nos dá uma aplicação linear $\mathrm{d}\pi_p : T_pP \longrightarrow T_mM$. Defina um subespaço C_p de T_pP por $C_p = \mathrm{Ker}(\mathrm{d}\pi_p)$. Então os subespaços C_p formam um subfibrado vetorial C do fibrado tangente TP, chamado o **subfibrado vertical**. Note que na verdade $C_p = T_p(\pi^{-1}(m))$, o espaço tangente à fibra de $\pi : P \longrightarrow M$ sobre m. E assim, como as fibras de π são as órbitas da G-ação livre sobre P, segue que existe um isomorfismo natural $C_p \cong \mathfrak{g}$, onde $\mathfrak{g}$ é a álgebra de Lie de G.

2.1.8 Definição. *Seja M uma variedade diferenciável e P um fibrado principal sobre M com fibra G, um grupo de Lie. Uma conexão sobre P é um sub-fibrado vetorial D de TP, chamado **subfibrado horizontal**, que é invariante sob a G-ação em P e que satisfaz $T_pP = C_p \oplus D_p$ para cada $p \in P$. Se $\pi(p) = m$, então $d\pi_p$ aplica $T_pP = C_p \oplus D_p$ sobrejetivamente em T_mM e, como $C_p =$ Ker $d\pi_p$, vemos que $d\pi_p$ induz um isomorfismo entre D_p e T_mM.*

Note que o fibrado horizontal D é naturalmente isomorfo à $\pi^*(TM)$. Assim, se $v \in C^\infty(TM)$ é um campo vetorial sobre M, então existe uma única seção do fibrado $D \subset TP$ sobre P, que denotaremos por $\lambda(v)$ tal que $\mathrm{d}\pi_p(\lambda(v)|_p) = v|_{\pi(p)}$ para cada $p \in P$. Esta seção $\lambda(v)$ é chamada usualmente de **levantamento horizontal** de v (do inglês *horizontal lift*) e é um campo vetorial sobre P, invariante pela G-ação.

Agora, após definirmos o que é uma conexão sobre um fibrado principal, podemos definir o que seria a noção de curvatura para tal fibrado.

Sejam M uma variedade diferenciável e P um fibrado principal sobre M com fibra G, um grupo de Lie cuja álgebra de Lie é $\mathfrak{g}$. Além disso, seja D uma conexão sobre P

como acabamos de definir. Ora, se $v, w \in C^\infty(TM)$ e α, β são funções suaves sobre M, então sabemos que $[\alpha v, \beta w] = \alpha\beta[v, w] + \alpha(v.\beta) - \beta(w.\alpha)$ donde:

$$[\lambda(\alpha v), \lambda(\beta w)] = [\alpha\lambda(v), \beta\lambda(w)] = \alpha\beta[\lambda(v), \lambda(w)] + \alpha(\lambda(v).\beta) - \beta(\lambda(w).\alpha),$$

$$\lambda([\alpha v, \beta w]) = \lambda(\alpha\beta[v, w] + \alpha(v.\beta) - \beta(w.\alpha)) = \alpha\beta\lambda([v, w]) + \alpha(\lambda(v).\beta) - \beta(\lambda(w).\alpha)$$

e assim segue que

$$[\lambda(\alpha v), \lambda(\beta w)] - \lambda([\alpha v, \beta w]) = \alpha\beta\{[\lambda(v), \lambda(w)] - \lambda([v, w])\},$$

onde $[,]$ é o colchete de Lie de campos vetoriais e o ponto "."(entre v e β por exemplo) indica derivada de Lie. Assim a expressão $[\lambda(\alpha v), \lambda(\beta w)] - \lambda([\alpha v, \beta w])$ é "linear" no mesmo sentido da proposição (2.1.6) e anti-simétrica em v, w. Além disso, como $\mathrm{d}\pi(\lambda(v)) = v$ para todos os campo vetoriais sobre M nós vemos que

$$\mathrm{d}\pi([\lambda(v), \lambda(w)]) = [\mathrm{d}\pi(\lambda(v)), \mathrm{d}\pi(\lambda(w))] = [v, w] = \mathrm{d}\pi(\lambda([v, w])).$$

Assim podemos ver que $[\lambda(v), \lambda(w)] - \lambda([v, w])$ está no kernel de $\mathrm{d}\pi$, que por sua vez é o sub-fibrado vertical C de TP. Mas existe uma identificação natural entre $C_p \cong \mathfrak{g}$ para cada $p \in P$ e assim podemos considerar $[\lambda(\alpha v), \lambda(\beta w)] - \lambda([\alpha v, \beta w])$ como uma seção do fibrado vetorial trivial $P \times \mathfrak{g}$ sobre P.

Como $\lambda(v), \lambda(w)$ e $\lambda([v, w])$ são invariantes sob a G-ação sobre P, esta seção de $P \times \mathfrak{g}$ é invariante sob a G-ação natural sobre $P \times \mathfrak{g}$. Mas pelo que fizemos acima existe uma correspondência 1-1 entre seções G-invariantes de $P \times \mathfrak{g}$ sobre P e seções do fibrado adjunto $\mathrm{ad}(P)$ sobre M. E toda essa argumentação acima nos dá uma demonstração para o seguinte resultado, que define a **curvatura** $R(P, D)$ de uma conexão D sobre P.

2.1.9 Proposição. *Sejam M uma variedade diferenciável, G um grupo de Lie com álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ e P um fibrado principal sobre M com fibra G. Além disso seja D uma conexão sobre P. Então existe uma única seção suave $R(P, D)$ de um fibrado vetorial $ad(P) \otimes \Lambda^2 T^*M$, chamada **curvatura** de D, que satisfaz*

$$\pi^*(R(P, D).v \wedge w) = [\lambda(v), \lambda(w)] - \lambda[v, w] \tag{2.6}$$

para todo $v, w \in C^\infty(TM)$.

Obs: Note que o lado esquerdo é uma função evaluada em $\mathfrak{g}$ sobre P e o lado direito é uma seção do sub-fibrado $C \subset TP$, e os dois lados são identificados usando o isomorfismo natural $C_p \cong \mathfrak{g}$ para $p \in P$.

Até aqui definimos o que é curvatura de uma conexão em um fibrado principal. Informalmente falando, é uma definição bastante sofisticada e uma pergunta totalmente natural é: "Isso de fato faz algum sentido ou mesmo se relaciona de alguma maneira com a definição que demos para curvatura em um fibrado vetorial?"

Para respondermos isso, considere M, P e G como o usual. Seja ρ uma representação de G sobre um espaço vetorial V, e defina $E \longrightarrow M$ como sendo o fibrado vetorial $\rho(P)$ sobre M. Dada uma conexão D sobre este fibrado principal P, vamos mostrar que é possível construir agora uma conexão única ∇^E sobre E.

Para isso, seja $e \in C^\infty(E)$, de modo que $\pi^*(e)$ é uma seção de $P \times V$ sobre P. Então $\pi^*(e)$ é uma função $\pi^* : P \longrightarrow V$, assim sua derivada exterior é um mapa linear $\mathrm{d}\pi^*(e)|_p : T_pP \longrightarrow V$ para cada $p \in P$. Donde $\mathrm{d}\pi^*(e)$ é uma seção suave do fibrado vetorial $V \otimes T^*P$ sobre P.

Seja D uma conexão sobre P. Então para cada $p \in P$ existem isomorfismos

$$T_pP \cong C_p \oplus D_p, \quad C_p \cong \mathfrak{g} \texttt{ and } D_p \cong \pi^*(T_{\pi(p)}M).$$

Estes isomorfismos nos dão uma decomposição natural do espaço $V \otimes T^*P \cong V \otimes \mathfrak{g}^* \oplus V \otimes \pi^*(T^*M)$. Agora,vamos escrever $\pi_D(\mathrm{d}\pi^*(e))$ para denotar a componente de $\mathrm{d}\pi^*(e)$ em $C^\infty(V \otimes \pi^*(T^*M))$ nesta decomposição. Assim ambos, $\pi^*(e)$ e o fibrado vetorial da decomposição são G-invariantes, de modo que $\pi_D(\mathrm{d}\pi^*(e))$ tem que ser G-invariante. Mas note que existe uma correspondência 1-1 entre seções G-invariantes de $V \otimes \pi^*(T^*M)$ sobre P, e seções do fibrado vetorial correspondente, $E \otimes T^*M$ sobre M. E assim $\pi_D(\mathrm{d}\pi^*(e))$ é o pull-back de um único elemento de $C^\infty(E \otimes T^*M)$, de modo que usamos isto para definir ∇^E, como queríamos.

Resumindo, a cada conexão D num fibrado principal P, temos uma única conexão associada ∇^E sobre o fibrado vetorial $E = \rho(P)$.

2.2 Fibrados Vetoriais, Conexões e Grupos de Holonomia

Nesta seção vamos apresentar a definição de grupos de holonomia sobre fibrados vetoriais e apresentar as suas propriedades mais básicas. A propriedade de maior interesse para nós é o que chamaremos de Teorema da Redução, que na verdade só será falado na próxima seção, quando falaremos de grupos de holonomia definidos sobre fibrados principais. Isto porque provaremos uma versão mais geral do teorema, em fibrados principais, e só depois faremos uso do resultado restrito à fibrados vetoriais.

Seja M uma variedade, $E \longrightarrow M$ um fibrado vetorial sobre M e ∇^E uma conexão sobre E. Seja $\gamma : [0,1] \to M$ uma curva suave em M. Então o pull-back $\gamma^*(E)$, de E para $[0,1]$, é um fibrado vetorial sobre $[0,1]$ com fibra $E_{\gamma(t)}$ sobre $t \in [0,1]$, onde E_x é a de E sobre $x \in M$.

Seja s uma seção suave de $\gamma^*(E)$ sobre $[0,1]$, i.e., s é uma função tal que $s(t) \in E_{\gamma(t)}$ para cada $t \in [0,1]$ e $\pi \circ s = id$. Podemos obter uma conexão em $\gamma^*(E)$ sobre [0,1] fazendo o pull-back de ∇^E por γ. Dizemos que a seção s é paralela se a sua derivada sob esta conexão pull-back é zero, i.e., se $\nabla^E_{\dot{\gamma}(t)} s(t) = 0$ para todo $t \in [0,1]$, onde $\dot{\gamma}$ é $\frac{d}{dt}\gamma(t)$, imaginado como um vetor em $T_{\gamma(t)}M$. E pela teoria de edo's de primeira ordem, para cada possivel valor inicial $e \in E_{\gamma(0)}$, existe uma única solução suave s com $s(0) = e$.

2.2.1 Definição. *Seja M uma variedade, $E \longrightarrow M$ um fibrado vetorial sobre M e ∇^E uma conexão em E. Suponha que $\gamma : [0,1] \longrightarrow M$ seja suave com $\gamma(0) = x$ e $\gamma(1) = y$, $x, y \in M$. Então para cada $e \in E_x$, existe uma única seção suave s de $\gamma^*(E)$ satisfazendo $\nabla^E_{\dot{\gamma}(t)} s(t) = 0$ para $t \in [0,1]$, com $s(0) = e$. Defina $P_\gamma(e) = s(1)$. Então $P_\gamma : E_x \longrightarrow E_y$ está bem definida como uma aplicação linear, chamado transporte paralelo.*

Sejam M, E, ∇^E como na definição acima, α e β dois caminhos suaves por partes e $x, y, z \in M$ tais que $\alpha(0) = x$, $\alpha(1) = y = \beta(0)$ e $\beta(1) = z$. Podemos definir aplicações α^{-1} e $\beta\alpha$ da seguinte maneira:

$$\alpha^{-1}(t) = \alpha(1-t), \quad \text{and}$$

$$\beta\alpha(t) = \begin{cases} \alpha(2t) & if \quad 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \beta(2t-1) & if \quad \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

Assim definidos, α^{-1} e $\beta\alpha$ são caminhos suaves por partes em M tais que $\alpha^{-1}(0) = y$, $\alpha^{-1}(1) = x$, $\beta\alpha(0) = x$ e $\beta\alpha(1) = z$. Usando as propriedades das curvas acima, é fácil provar que P_α e $P_{\alpha^{-1}}$ são inversas uma da outra (em particular, P_γ é invertível se γ é um caminho suave por partes em M) e que $P_{\beta\alpha} = P_\beta \circ P_\alpha$.

2.2.1 Mais Propriedades do Transporte Paralelo

Nesta subseção vamos apresentar alguns resultados específicos sobre a aplicação *transporte paralelo*, que irão ser importantes na hora que formos demonstrar Ambrose-Singer.

2.2.1.1 Lema. *Seja $E \longrightarrow M$ um fibrado vetorial sobre M e $\gamma : I \to M$ uma curva suave por partes. Sejam $t_0 \in I$ e $\sigma_1, ..., \sigma_k$ seções paralelas ao longo de γ. Suponha que $\sigma_1(t_0), ..., \sigma_k(t_0)$ formem uma base de $E_{\gamma(t_0)}$, então $\sigma_1(t), ..., \sigma_k(t)$ é uma base de $E_{\gamma(t)}$ para todo $t \in I$.*

Demonstração. Seja P_γ o transporte paralelo ao longo de γ de $p = \gamma(t_0)$ para $q = \gamma(t)$. Por definição, nós temos que $\sigma_i(t) = P_\gamma \sigma_i(t_0)$. Como P_γ é uma aplicação linear bijetiva (pois tem inversa), ele leva base em base. Assim, para todo $t \in I$, $\sigma_i(t)$ $(i = 1, ..., k)$ é uma base para $E_{\gamma(t)}$. $\square$

2.2.1.2 Definição. *Seja $\Phi = (\sigma_1, ..., \sigma_n)$ uma n-upla de seções paralelas ao long de uma curva γ. Dizemos que Φ é um referencial para o fibrado vetorial E ao longo de γ se $\sigma_1(t), ..., \sigma_n(t)$ é uma base de $E_{\gamma(t)}$, para todo $t \in I$.*

Obs. Vamos denotar por $C^\infty_\gamma(E)$ o conjunto de todas as seções suaves ao longo da curva γ.

Seja $\Phi = (\sigma_1, ..., \sigma_k)$ um referencial paralelo ao longo de γ e seja $\sigma \in C^\infty_\gamma(E)$. Então existe uma aplicação suave $p : I \longrightarrow \mathbb{R}^k$ tal que

$$\sigma = \sum_{i=1}^{k} p^i \sigma_i$$

Este mapa é chamado de **parte principal de σ com respeito à Φ.**

Como as seções σ_i são paralelas ao longo de γ temos que

$$\nabla^E_{\partial_t} \sigma = \sum_{i=1}^{k} (\partial_t p^i) \sigma_i \tag{2.1.1}$$

2.2.1.3 Lema. *Sejam $\sigma \in C^\infty_\gamma(E)$, $t_0 \in I$ e P_γ o transporte paralelo ao longo de γ de $\gamma(t)$ até $q = \gamma(t_0)$. Então*

$$P_\gamma \nabla^E_{\partial_t} \sigma = \partial_t P_\gamma \sigma. \tag{2.1.2}$$

Demonstração. Por definição, um referencial paralelo $\Phi = (\sigma_1, ..., \sigma_k)$ de E ao longo de γ é tal que

$$P_\gamma \sigma = \sum_{i=1}^{k} p^i(t_0) \sigma_i(t_0)$$

e

$$P_\gamma \nabla^E_{\partial_t} \sigma = \sum_{i=1}^{k} (\partial_t p^i(t_0) \sigma_i(t_0).$$

Analogamente à equação (2.1.1), vamos escrever $\nabla^E_{\partial_t} P_\gamma \sigma := \partial_t P_\gamma \sigma$ e assim definir

$$\partial_t P_\gamma \sigma := \sum_{i=1}^{k} (\partial_t p^i)(t_0) \sigma_i(t_0).$$

Daí segue que

$$P_\gamma \nabla^E_{\partial_t} \sigma = \partial_t P_\gamma \sigma$$

□

Agora, vejamos a seguinte "generalização"da aplicação transporte paralelo.

2.2.1.4 Definição. *Seja I um intervalo e M uma variedade. Defina a seguinte homotopia*

$$H : I \times [a, b] \longrightarrow M, \quad H(s, t) = h_s(t)$$

onde $h_s : [a, b] \longrightarrow M$ é uma família de aplicações suaves por partes, e $H(s, t)$ é suave in s. Essa aplicação H é dita ser uma homotopia suave por partes em M. Além disso, se H

satisfaz a propriedade de que $H(s,a) = p$ e $H(s,b) = q$, $p, q \in M$ fixos, para todo $s \in I$, então H é própria.

Como uma homotopia define uma rede de curvas na variedade (fixando s e percorrendo t e vice-versa), podemos usar a mesma construção de fibrado pull-back que usamos anteriormente para definir a noção de seção ao longo de uma homotopia. Vamos denotar uma seção por ao longo de H por $\sigma(s,t)$. E com isso, podemos falar também na noção de transporte paralelo ao longo de uma homotopia e assim, vamos denotar por $P_{s,t}$ o transporte paralelo ao longo de h_s do ponto $h_s(t)$ até $h_s(b)$

Baseado na notação acima, vamos definir a aplicação $R_{s,t} : c^{\infty}(E) \longrightarrow c^{\infty}(E)$ por

$$R_{s,t} = P_{s,t} \circ R(\partial_t H(s,t), \partial_s H(s,t)) \circ P_{s,t}^{-1}. \tag{2.1.3}$$

2.2.1.5 Lema. *Seja σ uma seção suave por partes ao longo da homotopia suave por partes H, tal que $\nabla^E_{\partial_t}\sigma(s,t) = 0$ e $\nabla^E_{\partial_s}\sigma(s,a) = 0$ para todo $s \in I$. Então*

$$\nabla^E_{\partial_s}\sigma(s,b) = \big(\int_a^b R_{s,t}dt)\sigma(s,b). \tag{2.1.4}$$

Demonstração. Ora, em coordenadas locais

$$\nabla^E_{\partial_t}\nabla^E_{\partial_s}\sigma = \nabla^E_{\partial_s}\nabla^E_{\partial_t}\sigma + R(\partial_t H, \partial_s H)\sigma = R(\partial_t H, \partial_s H)\sigma$$

Agora, pelo lema (2.2.1.3) podemos escrever

$$\begin{aligned} \partial_t P_{s,t}\nabla^E_{\partial_s}\sigma(s,t) &= P_{s,t}(\nabla^E_{\partial_t}\nabla^E_{\partial_s}\sigma(s,t)) \\ &= P_{s,t}(R(\partial_t H(s,t), \partial_s H(s,t))\sigma(s,t)) \\ &= P_{s,t}(R(\partial_t H(s,t), \partial_s H(s,t))P_{s,b}^{-1}(\sigma(s,t))) \\ &= R_{s,t}\sigma(s,b) \end{aligned} \tag{2.1.5}$$

É claro que $R_{s,t} \in End(E_{h_b})$, pois $End(E_{h_b})$ é o espaço de todas as aplicações lineares de E_{h_b} nele mesmo. Além disso, E_{h_b} tem estrutura de espaço vetorial, com multiplicação por escalar e composição de aplicações, e para cada $s \in I$ fixo, podemos integrar ao longo das curvas dadas por $R_{s,t}$; mais que isso, $\displaystyle\int_a^b R_{s,t}dt$ é também uma aplicação linear de E_{h_b} nele mesmo.

Daí, pela definição de $P_{s,t}$, temos que $P_{s,b} = Id_{E_{h_b}}$ e por hipótese, $\nabla^E_{\partial_s}\sigma(.,a) = 0$, donde

$$\nabla^E_{\partial_s}\sigma(s,b) = P_{s,b}\nabla^E_{\partial_s}\sigma(s,b) - P_{s,a}\nabla^E_{\partial_s}\sigma(s,a). \tag{2.1.6}$$

Usando (2.1.5), temos

$$\begin{aligned} P_{s,b}\nabla^E_{\partial_s}\sigma(s,b) - P_{s,a}\nabla^E_{\partial_s}\sigma(s,a) &= \int_a^b \partial_t P_{s,t}(\nabla^E_{\partial_s}\sigma(s,t))dt \\ &= \int_a^b R_{s,t}\sigma(s,b)dt \\ &=: \left(\int_a^b R_{s,t}dt\right)\sigma(s,b). \end{aligned}$$

E assim por (2.1.6), segue o resultado desejado. □

É válido lembrarmos que definimos uma homotopia suave por partes e argumentamos que, de alguma maneira, fazia sentido usar o fibrado pull-back e definir assim uma seção suave $\sigma(s,t)$ e também o transporte paralelo ao longo da homotopia. Ora, como todos os nossos "ingredientes"são suaves em s e t, podemos fixar $t \in [a,b]$ e esperar que, por exemplo, o resultado do lema (2.2.1.3) também seja válido para a ação de ∂_s. Em outras palavras,

$$P_{s,t}\nabla^E_{\partial_s}\sigma(s,t) = \partial_s P_{s,t}\sigma(s,t) \tag{2.1.7}$$

E assim como no lema anterior, se supusermos que $\nabla^E_{\partial_s}\sigma(s,a) = 0$, i.e., $\sigma(.,a)$ é uma constante, podemos reescrever (2.1.6) como

$$\nabla^E_{\partial_s}\sigma(s,b) = P_{s,b}\nabla^E_{\partial_s}\sigma(s,b) \overset{(2.1.7)}{=} \partial_s P_{s,b}\sigma(s,b) \overset{P_{s,b}=Id}{=} \partial_s\sigma(s,b).$$

Então (2.1.4) implica que

$$\partial_s\sigma(s,b) = \left(\int_a^b R_{s,t}dt\right)\sigma(s,b), \tag{2.1.8}$$

que é uma EDO linear de primeira ordem para $\sigma(s,b)$.

Ainda sobre as mesmas hipóteses sobre σ e observando que $\sigma(s,b) = P_{s,a}\sigma(s,a)$, pois $P_{s,a}$ é o transporte paralelo ao longo de h_s de $h_s(a)$ até $h_s(b)$, podemos reescrever (2.1.8)

$$\partial_s P_{s,a}(\sigma(s,a)) = \left(\int_a^b R_{s,t}dt\right)(P_{s,a}(\sigma(s,a))). \tag{2.1.9}$$

donde

$$\partial_s P_{s,a} = \left(\int_a^b R_{s,t}dt\right)P_{s,a}. \tag{2.1.10}$$

Uma possível interpretação da equação (2.1.10) é que a curvatura nos diz, de alguma maneira, como é que o transporte paralelo depende do caminho escolhido. Mas, a curvatura pode nos dizer ainda mais sobre a dependência do transporte paralelo para com o caminho escolhido; ela pode nos dar uma informação "infinitesimal". Vejamos:

2.2.1.6 Teorema. *Seja M uma variedade, tome $p \in M$ e $A, B \in T_pM$. Seja $f : U \to M$ uma função suave tal que $f(0) = p$, $\partial_x f|_0 = A$, $\partial_y f|_0 = B$ e defina $H : [0,1]\times[0,1] \longrightarrow M$ como sendo a seguinte homotopia suave por partes:*

$$h_s(t) = \begin{cases} f(4st, 0) & se \quad 0 \leq t \leq \frac{1}{4} \\ f(s, s(4t-1)) & se \quad \frac{1}{4} \leq t \leq \frac{1}{2} \\ f(s(3-4t), s) & se \quad \frac{1}{2} \leq t \leq \frac{3}{4} \\ f(0, 4s(1-t)) & se \quad \frac{3}{4} \leq t \leq 1 \end{cases} \tag{2.1.11}$$

onde $H(s,t) = h_s(t)$. Seja P_s o transporte paralelo ao longo de h_s, de $h_s(0)$ até $h_s(1)$. Então

$$\partial_s P_s|_{s=0} = 0$$

e

$$\partial_s\partial_s P_s|_{s=0} = 2R(A,B)|_{s=0}.$$

Demonstração. Ora, o tensor de curvatura é, por definição, anti-simétrico em (.,.). Daí, pela definição de H temos que:

$$R(\partial_t H, \partial_s H) = \begin{cases} 0 & se \quad t < \frac{1}{4} \text{ ou } t > \frac{3}{4} \\ 4sR(\partial_x f, \partial_y f) & se \quad \frac{1}{4} \leq t \leq \frac{3}{4} \end{cases} \tag{2.1.12}$$

E por (2.1.8) (lembrando que agora $a = 0$ e $b = 1$) temos

$$\partial_s P_s = \left(\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}} R_{s,t} dt \right) P_s. \tag{2.1.13}$$

Segue daí que, como $R_{s,t} = 0$ em $s = 0$, então $\partial_s P_s|_{s=0}$ também se anula.

Agora, para a segunda derivada, nós temos que, por definição

$$\partial_s(\partial_s P_s)|_{s=0} = \lim_{s \to 0} \frac{\partial_s P_s(s)|_s - \partial_s P_s|_0}{s} = \lim_{s \to 0} \frac{\partial_s P_s|_s}{s} \tag{2.1.14}$$

e por (2.1.12) nós temos que

$$\frac{R_{s,t}}{4s} = P_{s,t} R(\partial_x f, \partial_y f) P_{s,t}^{-1}.$$

E substituindo (2.1.13) em (2.1.14)

$$\partial_s(\partial_s P_s)|_{s=0} = \lim_{s \to 0} \frac{\left(\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}} R_{s,t} dt \right) P_s|_s}{s}$$

Mas por (2.1.10) e o fato de o transporte paralelo depender continuamente do caminho escolhido

$$\frac{R_{s,t}}{4s} = P_{s,t} R(\partial_x f, \partial_y f) P_{s,t}^{-1} \longrightarrow R(A, B)$$

quando $s \to 0$ e uniformemente em t. E assim, finalmente

$$\partial_s(\partial_s P_s)|_{s=0} = \left(\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}} 4R(A, B) dt \right) |)0 = \frac{1}{2} 4R(A, B)|_0 = 2R(A, B)|_0.$$

□

2.2.2 Grupos de Holonomia em Fibrados Vetoriais

2.2.2 Definição. *Seja M uma variedade, $E \longrightarrow M$ um fibrado vetorial sobre M e ∇^E uma conexão sobre E. Fixe um ponto $x \in M$ arbitrariamente. Dizemos que uma curva suave por partes em M, $\gamma : [0,1] \to M$, é um* ***loop baseado em x*** *se $\gamma(0) = \gamma(1) = x$.Se γ é um loop baseado em x, então $P_\gamma : E_x \longrightarrow E_x$ é uma aplicação linear invertível, de modo que P_γ vive em $GL(E_x)$, o grupo das transformações lineares invertíveis de E_x. Definimos então o* ***grupo de holonomia*** *$Hol_x(\nabla^E)$ de ∇^E baseado em x por:*

$$Hol_x(\nabla^E) = \{P_\gamma;\ \gamma \text{ é um loop baseado em } x\} \subset GL(E_x). \tag{2.7}$$

Como observamos anteriormente, se α, β são loops baseados em x, então α^{-1} e $\beta\alpha$ também o são e assim $P_{\alpha^{-1}} = P_\alpha^{-1}$ e $P_{\beta\alpha} = P_\beta \circ P_\alpha$. Daí, se P_α e P_β estão em $Hol_x(\nabla^E)$, então P_α^{-1} e $P_\beta \circ P_\alpha$ também estarão. Isto mostra que $Hol_x(\nabla^E)$ merece, de fato, ser chamado de *grupo*, pois é um subgrupo de $GL(E_x)$.

Seja M uma variedade conexa[1], e tomemos $x, y \in M$ arbitrários. Por definição, podemos encontrar um um caminho suave por partes $\gamma : [0,1] \longrightarrow M$, com $\gamma(0) = x$ e $\gamma(1) = y$, tal que $P_\gamma : E_x \longrightarrow E_y$. Agora se α é um loop baseado em x, então $\gamma\alpha\gamma^{-1}$ é um loop baseado em y e $P_{\gamma\alpha\gamma^{-1}} = P_\gamma \circ P_\alpha \circ P_{\gamma^{-1}} \in Hol_y(\nabla^E)$. Mais que isso, se α é um loop em x, então $P_\alpha \in Hol_x(\nabla^E)$ e

$$P_\gamma Hol_x(\nabla^E) P_\gamma^{-1} = Hol_y(\nabla^E) \tag{2.8}$$

Esta equação (2.8) nos diz que o grupo de holonomia *independe do ponto base*, a menos de conjugação. Mais precisamente, poderíamos escrever:

2.2.3 Proposição. *Seja $E \longrightarrow M$ um fibrado vetorial com fibra $\mathbb{R}^k$ sobre M. E seja ∇^E uma conexão sobre esse fibrado. Para cada $x \in M$, o grupo de holonomia $Hol_x(\nabla^E)$ pode ser considerado como um subgrupo de $GL(k, \mathbb{R})$ definido a menos de conjugação em $GL(k, \mathbb{R})$, e neste sentido é independente do ponto base x.*

[1]Neste texto, as variedades serão sempre consideramdas **conexas**, a menos que o contrário seja dito explicatamente.

Haja vista a proposição acima, podemos omitir o subíndice x do grupo de holonomia e escrever apenas $Hol(\nabla^E)$.

2.2.4 Proposição. *Seja M uma variedade simplesmente conexa, E um fibrado vetorial sobre M com fibra $\mathbb{R}^k$ e ∇^E uma conexão sobre este fibrado vetorial. Então o grupo de holonomia, $Hol(\nabla^E)$, é um subgrupo de Lie de $GL(k, \mathbb{R})$* ***conexo****.*

Demonstração. Inicialmente, escolhemos um ponto base $x \in M$ de maneira arbitrária e consideramos γ um loop em M baseado neste ponto x. Como M é simplesmente conexa, esse loop pode ser contraído, via homotopia, ao loop constante em x, i.e., existe uma família $\{\gamma_s; s \in [0,1]\}$, onde cada $\gamma_s : [0,1] \to M$ é suave por partes e satifaz $\gamma_s(0) = \gamma_s(1) = x$ (ou seja, é loop baseado em x), $\gamma_0(t) = x$ para $t \in [0,1]$, $\gamma_1 = \gamma$ e $\gamma_s(t)$ depende de s de uma maneira suave por partes.

Portanto $s \mapsto P_{\gamma_s}$ é uma aplicação suave por partes de $[0,1]$ para $Hol(\nabla^E)$. Mas como estamos considerando γ_0 como o loop constante em x, temos que $P_{\gamma_0} = 1$ e $P_{\gamma_1} = P_\gamma$, pois $\gamma_1 = \gamma$. Assim, cada P_γ em $Hol(\nabla^E)$ pode ser ligado à identidade por um caminho suave por partes em $Hol(\nabla^E)$. Agora usando o resultado em [15], devido a Yamabe, todo subgrupo arco-conexo de um grupo de Lie é um subgrupo de Lie conexo. Então, segue que $Hol(\nabla^E)$ é um subgrupo de Lie conexo de $GL(k, \mathbb{R})$. □

2.2.5 Definição. *Seja $E \longrightarrow M$ um fibrado vetorial sobre M com fibra $\mathbb{R}^k$ e ∇^E uma conexão sobre este fibrado. Fixe $x \in M$. Um loop baseado em x é dito ser* ***homotopicamente nulo*** *se ele pode ser deformado ao loop contante. Nesse caso, se M não é uma variedade conexa, definimos o* ***grupo de holonomia restrito*** *$Hol^0_x(\nabla^E)$ de ∇^E como sendo*

$$Hol^0_x(\nabla^E) = \{P_\gamma; \gamma \text{ é um loop homotopicamente nulo baseado em } x\} \tag{2.9}$$

E é claro que este grupo pode ser considerado como um subgrupo de $GL(k, \mathbb{R})$ definido a menos de conjugação, i.e., independente do ponto base x.

É claro que esse grupo também satisfaz algumas propriedades interessantes, como por exemplo

2.2.6 Proposição. *Seja $E \longrightarrow M$ um fibrado vetorial sobre M com fibra $\mathbb{R}^k$ e ∇^E uma conexão sobre este fibrado. Então $Hol^0(\nabla^E)$ é um subgrupo de Lie conexo de $GL(k, \mathbb{R})$. Mais que isso, ele é a componente conexa de $Hol(\nabla^E)$ que contém a identidade, e é um subgrupo normal de $Hol(\nabla^E)$. Existe um homomorfismo sobrejetivo de grupos natural $\phi : \pi_1(M) \longrightarrow Hol(\nabla^E)/Hol^0(\nabla^E)$. Assim, se M for simplesmente conexo, então $Hol(\nabla^E) = Hol^0(\nabla^E)$.*

Demonstração. O mesmo argumento que usamos para provar a proposição (2.2.4) pode ser usado para provarmos que o grupo de holonomia restrito, $Hol^0(\nabla^E)$, é um subgrupo de Lie conexo de $GL(k, \mathbb{R})$. Agora, para provar que este é um subgrupo normal de $Hol(\nabla^E)$, basta tomarmos um $x \in M$ qualquer e dois loops α, β baseados em x, com β homotopicamente nulo. Assim definidos, é óbvio que $\alpha\beta\alpha^{-1}$ é homotopicamente nulo. Daí, se $P_\alpha \in Hol_x(\nabla^E)$ e $P_\beta \in Hol_x^0(\nabla^E)$, então $P_{\alpha\beta\alpha^{-1}} = P_\alpha P_\beta P_\alpha^{-1}$ também estará em $Hol_x^0(\nabla^E)$, e então segue que $Hol_x^0(\nabla^E)$ é um subgrupo normal de $Hol_x(\nabla^E)$.

Agora o homomorfismo de grupos $\phi : \pi_1(M) \longrightarrow Hol_x(\nabla^E)/Hol_x^0(\nabla^E)$ é dado por $\phi([\gamma]) = P_\gamma.Hol_x^0(\nabla^E)$, onde γ é um loop baseado em x e $[\gamma]$ o elemento correspondente de $\pi_1(M)$. Agora é fácil verificar que ϕ é um homomorfismo de grupos sobrejetivo. E como $\pi_1(M)$ é enumerável, o grupo quociente $Hol_x(\nabla^E)/Hol_x^0(\nabla^E)$ também o será. Donde segue que $Hol_x^0(\nabla^E)$ é de fato a componente conexa de $Hol_x(\nabla^E)$ contendo a identidade. (Para mais detalhes, ver a prova disto na proposição (2.3.4), que será feita de maneira mais geral em fibrados principais.) $\square$

2.2.7 Definição. *Seja $E \longrightarrow M$ um fibrado vetorial sobre M com fibra $\mathbb{R}^k$ e ∇^E uma conexão sobre E.Então $Hol^0(\nabla^E)$ é um subgrupo de Lie conexo de $GL(k, \mathbb{R})$, definido a menos de conjugação. Definimos a* ***álgebra de holonomia*** *$\mathfrak{hol}(\nabla^E)$ como sendo a álgebra de Lie de $Hol^0(\nabla^E)$. Esta é, por sua vez, uma subálgebra de Lie de $\mathfrak{gl}(k, \mathbb{R})$, definida a menos de uma ação adjunta de $GL(k, \mathbb{R})$. Similarmente, $Hol_x^0(\nabla^E)$ é um subgrupo de Lie de $GL(E_x)$ para todo $x \in M$. Por isso, definimos $\mathfrak{hol}_x(\nabla^E)$ como sendo a álgebra de Lie de $Hol_x^0(\nabla^E)$, que é uma subálgebra de $End(E_x)$.*

Pelo fato de $Hol^0(\nabla^E)$ ser a componente conexa de $Hol(\nabla^E)$ contendo a identidade, temos que suas álgebras de Lie coincidem. Mas, embora $Hol^0(\nabla^E)$ seja um subgrupo de

Lie de $GL(k, \mathbb{R})$, ele não é necessariamente um subgrupo fechado, de modo que não podemos garantir que ele seja uma subvariedade de $GL(k, \mathbb{R})$. Mesmo se $Hol^0(\nabla^E)$ for fechado, podemos ter que o grupo de holonomia $Hol(\nabla^E)$ não seja fechado em $GL(k, \mathbb{R})$.

Para ilustrar isso, podemos olhar para a inclusão de $\mathbb{R}$ no toro $T^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ dada por $t \mapsto (t + \mathbb{Z}, t\sqrt{2} + \mathbb{Z})$, $t \in \mathbb{R}$. Ele é um subgrupo de Lie não-fechado de um grupo de Lie e também não é uma subvariedade de T^2.

2.3 Grupos de Holonomia e Fibrados Principais

O objetivo desta seção é apresentar a generalização de grupos de holonomia para fibrados principais, mais alguns resultados e propriedades desses grupos nesse caso e depois, finalmente, apresentar o demonstrar o Teorema de Redução, que nos será extremamente útil no final deste capítulo.

2.3.1 Definição. *Seja M uma variedade, P um fibrado principal sobre M com fibra G e D uma conexão sobre este fibrado principal. Seja $\gamma : [0,1] \longrightarrow P$ uma curva suave em P. Então $\dot{\gamma}\ (t) \in T_{\gamma(t)}P$ é tangente à $\gamma([0,1])$ para cada $t \in [0,1]$. Chamamos γ de uma **curva horizontal** se o seu vetor tangente é horizontal, isto é, se $\dot{\gamma}\ (t) \in D_{\gamma(t)}$ para cada $t \in [0,1]$. Analogamente, dizemos que uma curva suave por partes é horizontal se o mesmo acontece no subconjunto aberto e denso de $[0,1]$ onde $\dot{\gamma}\ (t)$ está bem definido.*

Para definirmos grupos de holonomias em fibrados principais ainda precisamos definir o **levantamento horizontal** de γ, da seguinte maneira:

Se $\gamma : [0,1] \longrightarrow M$ é uma curva suave por partes com $\gamma(0) = m$ e $p \in P$ tal que $\pi(p) = m$, então existe uma única aplicação suave por partes horizontal $\gamma' : [0,1] \longrightarrow P$ tal que $\gamma'(0) = p$ e $\pi \circ \gamma'$ é igual à γ, que aplica $[0,1] \to M$. Isso segue dos resultados de existência de edo's aplicados de maneira análoga ao que é feito para provar existência e unicidade de seções paralelas de $\gamma^*(E)$, que usamos na definição (2.2.1). Esta γ' é chamada de **levantamento horizontal** de γ.

Suponha que tomemos $p, q \in P$ arbitrários e definimos uma certa relação $\sim$ da seguinte maneira: $p \sim q$ se existe uma curva suave por partes horizontal em P que liga p à q. É fácil vermos que essa é uma relação de equivalência.

2.3.2 Definição. *Seja M uma variedade, P um fibrado principal sobre M com fibra G e D uma conexão em P. Seja $\sim$ a relação de equivalência definida acima. Fixe $p \in P$, definimos então o **grupo de holonomia** de (P,D) baseado em p como sendo $Hol_p(P,D) = \{g \in G; p \sim g.p\}$. Similarmente, definimos o **grupo de holonomia restrito** Hol^0_p como sendo o conjunto dos $g \in G$ tais que existe uma curva suave por partes, horizontal, $\gamma : [0,1] \longrightarrow P$ tal que $\gamma(0) = p$, $\gamma(1) = g.p$, e $\pi \circ \gamma$ é homotopicamente nula* *em M.*

Por que faz sentido chamar $Hol_p(P,D)$ de grupo? Ora, pela definição de $\sim$, temos que se $p \sim q$, então existe uma curva suave por partes em P, horizontal, que liga p à q. Agora, dado um $g \in G$, aplicamos este g à γ e vemos que $g.\gamma$ é a curva horizontal que liga $g.p$ à $g.q$. Em palavras mais técnicas, se $g \in G$ e $p \sim q$, então $g.p \sim g.q$. Se $g \in Hol_p(P,D)$, então $p \sim g.p$. Aplicando g^{-1} temos então que $g^{-1}.p \sim g^{-1}.(g.p) = p$, donde $p \in g^{-1}.p$ e assim $g^{-1} \in Hol_p(P,D)$, ou seja, $Hol_p(P,D)$ contém os inversos de seus elementos.

Agora suponha que $g,h \in Hol_p(P,D)$. Aplicando g à $p \sim h.p$ temos que $g.p \sim (gh).p$. Mas como $g \in Hol_p(P,D)$, então $p \sim g.p$ e como $\sim$ é relação de equivalência, temos que $p \sim (gh).p$, donde $(gh) \in Hol_p(P,D)$, ou seja, $Hol_p(P,D)$ é fechado para o produto, o que nos diz que ele é um subgrupo de G, assim como $Hol_p^0(P,D)$ também o é (via argumento semelhante).

Uma outra propriedade básica sobre essa definição de grupo de holonomia é que, se $p,q \in P$ são tais que $p \sim q$, como $\sim$ é relação de equivalência, é fácil vermos que $Hol_p(P,D) = Hol_q(P,D)$.

Também é fácil vermos que se $g \in G$ e $p \in P$, então $Hol_{g.p}(P,D) = g.Hol_p(P,D).g^{-1}$. Com efeito, por definição de fibrado principal, se $p,q \in P$, então $\pi(p), \pi(q) \in M$. Mas como estamos supondo (falamos isso em um rodapé) M conexa, existe um caminho suave por partes $\gamma : [0,1] \longrightarrow M$ com $\gamma(0) = \pi(p)$ e $\gamma(1) = \pi(q)$. Assim, por definição, existe um *único* levantamento horizontal γ' de γ tal que $\gamma'(0) = p$ e $\gamma'(1) = q'$, para algum $q' \in P$. Mas como $\pi(q') = \pi(q)$, temos que $q' = g.q$, para algum $g \in G$. Do fato de γ' ser horizontal, temos que $p \sim q'$. Assim, sempre que $p,q \in P$, vai existir $g \in G$ com a propriedade que $q \sim g.p$, em outras palavras:

$$Hol_q(P,D) = Hol_{g.p}(P,D) = g.Hol_p(P,D).g^{-1} \tag{2.10}$$

Podemos, é claro, resumir os comentários acima na seguinte proposição:

2.3.3 Proposição. *Seja $P \longrightarrow M$ um fibrado principal sobre M com fibra G, e D uma* *conexão sobre P. Então o grupo de holonomia $Hol_p(P,D)$ depende do ponto base a menos de conjugação em G. Assim, podemos entender o grupo de holonomia como uma classe de equivalência de subgrupos de G sob conjugação, e ele é então independente de p e pode ser escrito como $Hol(P,D)$. Similarmente, podemos entender o grupo de holonomia restrito $Hol_p^0(P,D)$ como uma classe de equivalência de subgrupos de G sob conjugação e escrever $Hol^0(P,D)$.*

2.3.4 Proposição. *Seja M uma variedade, P um fibrado principal sobre M com fibra G e D uma conexão em P. Então $Hol^0(P,D)$ é um subgrupo de Lie conexo de G. Mais que isso, ele é a componente conexa de $Hol(P,D)$ contendo a identidade e é normal em $Hol(P,D)$. Existe também um homomorfismo sobrejetivo de grupos natural $\phi : \pi_1(M) \longrightarrow Hol(P,D)/Hol^0(P,D)$. Se M é simplesmente conexo, então $Hol(P,D) = Hol^0(P,D)$.*

Demonstração. Tome um ponto base $p \in P$ e um $g \in Hol_p^0(P,D)$ de maneira arbitrária. É claro que $e \in Hol_p^0(P,D)$, a identidade. Queremos mostrar então que existe um caminho suave por partes em $Hol_p^0(P,D)$ que liga g à e, e assim usar o mesmo resultado de Yamabe utilizado na proposição (2.2.4).

Por definição, existe γ' (denotamos assim para motivar as ideias) uma curva suave por partes horizontal em P tal que $\gamma'(0) = p$, $\gamma'(1) = g.p$ e $\pi \circ \gamma' = \gamma$ é homotopicamente nula em M. Daí, considere a homotopia suave por partes $\gamma_s : [0,1] \longrightarrow M$ que deforma γ em um único ponto de M, i.e., $\gamma_0(t) = c \in M, \forall t \in [0,1]$, $\gamma_1(t) = \gamma(t)$ e para todo $s \in [0,1], \gamma_s$ é suave por partes.

Agora, para cada $s \in [0,1]$, considere o levantamento horizontal de γ_s, γ'_s. É claro que esta curva em P, por ser levantamento horizontal satisfaz $\gamma'_s(0) = p, \forall s \in [0,1]$, é suave e, em particular, γ'_0 é a curva que liga p à $e.p = p$ e $\gamma'_1 = \gamma'$ (liga p à g.p).

Portanto $s \mapsto \gamma'_s(1)$ é uma aplicação suave por partes de $[0,1]$ para $Hol_p^0(P,D)$ (na verdade, $\gamma'_s(1)$ é um elemento do tipo $\tilde{g}.p$, mas existe um difeomorfismos natural entre $Hol_p^0(P,D)$ e $Hol_p^0(P,D).p$). Mas como estamos considerando γ' como uma curva horizontal em P e $\gamma = \pi \circ \gamma'$, temos que o levantamento horizontal de γ é a própria γ' (por isso a denotamos inicialmente assim), daí essa aplicação acima nos dá um caminho suave por partes em $Hol_p^0(P, D)$ que liga g à e, ou seja, $Hol_p^0(P, D)$ é arco-conexo[1]. Portanto $Hol_p^0(P, D)$ é de fato um subgrupo de Lie conexo de G.

O fato de ser normal tem prova totalmente análoga ao do caso de um fibrado vetorial.

Agora, seja $\pi_1(M)$ o primeiro grupo de homotopia[2] de M com ponto base em x. Para cada elemento α de $\pi_1(M)$, seja γ um loop contínuo em x que represente α. Podemos cobrir γ por um número finito de vizinhanças coordenadas e então deformar γ dentro de cada uma dessas vizinhanças de modo a obter um loop em x, suave por partes, γ_1, que é homotópico à γ. Se γ_1 e γ_2 são tais loops, então $\gamma_1 \circ \gamma_2^{-1}$ é um loop homotópico à zero e define um elemento de $Hol_p^0(P, D)$. Assim, γ_1 e γ_2 definem o mesmo elemento em $Hol_p(P, D)/Hol_p^0(P, D)$, que iremos denotar por $\phi(\alpha)$. Definido assim, claramente ϕ é um homomorfismo de grupos sobrejetivo de $\pi_1(M)$ sobre $Hol_p(P, D)/Hol_p^0(P, D)$. Mas da topologia algébrica, sabemos que $\pi_1(M)$ é contável, de modo que $Hol_p(P, D)/Hol_p^0(P, D)$ também o é. $\square$

2.3.5 Definição. *Seja $P \longrightarrow M$ um fibrado principal sobre M com fibra G e D uma conexão sobre P.Então $Hol^0(P, D)$ é um subgrupo de Lie conexo de G, definido a menos de conjugação. Definimos a* ***álgebra de holonomia*** *$\mathfrak{hol}(P, D)$ como sendo a álgebra de Lie de $Hol^0(P, D)$. Esta é, por sua vez, uma subálgebra de Lie de $\mathfrak{g}$, a álgebra de Lie de G, e é definida a menos de uma ação adjunta de G em $\mathfrak{g}$.*

Agora, seja $\mathfrak{hol}_p(P, D) \subseteq \mathfrak{g}$ a álgebra de Lie de $Hol_p^0(P, D)$. Seja $\pi(p) = m \in M$ e difina $\mathfrak{hol}_m(P, D) = \pi(\mathfrak{hol}_p(P, D))$, onde $\pi : P \times \mathfrak{g} \longrightarrow \mathrm{ad}(p)$ é o mesmo que na definição (2.1.3). Então $\mathfrak{hol}_m(P, D)$ é um subespaço vetorial de $\mathrm{ad}(P)_m$. Como $\mathfrak{hol}_{g.p}(P, D) = \mathrm{Ad}(g)[\mathfrak{hol}_p(P, D)]$ para qualquer $g \in G$, é fácil ver que $\mathfrak{hol}_m(P, D)$ é independente da escolha de $p \in \pi^{-1}(m)$. Assim, segue que $\mathfrak{hol}_m(P, D)$ está bem definido.

Como comentamos no início da seção, queremos provar o chamado Teorema de

[1]Na verdade, no livro Foundations of Differential Geometry, vol. 1, de Kobayashi e Nomizu, eles provam no apêndice 4 um resultado um pouco mais fraco que o de Yamabe, mas que é exatamente o resultado o qual estamos usando.

[2]Seja M uma variedade diferenciável. Dizemos que duas curvas contínuas em M são homotópicas se elas podem ser deformadas continuamente uma na outra. Então $\pi_1(M) := \{\gamma : [0, 1] \rightarrow M; \gamma \text{ é loop baseado em x}\}/\sim$, onde $\sim$ é a relação de equivalência "ser homotópico à".

Redução, que será importante para o entendimento do Teorema de Ambrose-Singer. Ora, vamos definir a noção de **redução** de um fibrado principal P.

Para isso, tomamos P, M, G da maneira usual e D uma conexão neste fibrado. Fixemos $p \in P$. Denotemos por $H = Hol_p(P, D)$ para facilitar a notação e suponhamos que H seja um subgrupo de Lie **fechado** de G. Defina $Q = \{q \in P; p \sim q\}$. É claro que este conjunto Q é preservado pela ação de H sobre P, pois H é grupo de holonomia, e assim H age livremente em Q. Além disso, se restringimos π à Q, temos uma nova projeção $\pi Q \longrightarrow M$. Mas se olharmos as fibras de Q por essa projeção, isto é, $\pi^{-1}(m) \bigcap Q$, para qualquer$m \in M$, vemos que elas coincidem com as órbitas de H. Como H é subgrupo fechado de G, então H é grupo de Lie, daí segue que, como H age livremente em Q, temos que Q é uma subvariedade de P e portanto, uma variedade diferenciável. Agora, se H não for fechado, não podemos garantir que esse Q seja uma variedade no sentido usual.

Agora, pelo que foi feito acima, vemos que Q é na verdade um sub-fibrado principal de P, com fibra H. Um sub-fibrado deste tipo é chamado uma **redução** de P.

2.3.6 Teorema. ***(Teorema de Redução):*** *Seja M uma variedade diferenciável, P um fibrado vetorial sobre M com fibra G, um grupo de Lie, e D uma conexão em P. Fixe* $p \in P$ *e seja* $H = Hol_p(P, D)$. *Suponha que H é um subgrupo de Lie fechado de G. Defina* $Q = \{q \in P; p \sim q\}$. *Então que é um sub-fibrado principal de P com fibra H, e a conexão D sobre P se restringe à uma conexão* D' *sobre Q. Em outras palavras, P se reduz à Q, e a conexão D sobre P se reduz à* D' *sobre Q.*

Demonstração. Seja C' o sub-fibrado vertical de Q. Um ponto q vive em Q se ele pode ser ligado à p (que está fixado) por uma curva horizontal suave por partes. Assim, toda curva horizontal suave por partes que começa em Q tem que continuar em Q, e assim T_qQ deve conter todos os vetores horizontais em q.Assim, $D_q \subset T_qQ$. Mas, por definição, $T_qP = C_q \otimes D_q$, e $D_q \subset T_qQ$, donde segue que $C'_q = C_q \bigcap T_qQ$. Daí, temos que a restrição D' da distribuição D à Q é na verdade uma conexão sobre Q. □

Agora, como podemos comparar os grupos de holonomia de conexões em fibrados vetoriais com estes que definimos para fibrados principais? A resposta a essa pergunta é dada pela seguinte proposição:

2.3.7 Proposição. *Seja $P \longrightarrow M$ um fibrado principal sobre M com fibra G. Suponha que $\rho : G \longrightarrow GL(V)$ é uma representação de G sobre um espaço vetorial V, e defina $E = \rho(V)$. Seja D uma conexão sobre P e ∇^E a conexão sobre E, definida no final da seção 1. Então $Hol(P, D)$ e $Hol(\nabla^E)$ são subgrupos de G e $GL(V)$ respectivamente, ambos definidos a menos de conjugação, e $\rho(Hol(P, D)) = Hol(\nabla^E)$.*

Similarmente, seja $E \longrightarrow M$ um fibrado vetorial sobre M com fibra $\mathbb{R}^k$, e seja F^E o frame bundle de E. Então FE é um fibrado principal sobre M com fibra $GL(k, \mathbb{R})$. Seja ∇^E uma conexão em E e D^E a correspondente conexão em F^E. Então $Hol(\nabla^E)$ e $Hol(F^E, D^E)$ são subgrupos de $GL(k, \mathbb{R})$ definidos a menos de conjugação, e $Hol(\nabla^E) = Hol(F^E, D^E)$.

Como o nosso intuito de escrever essa seção foi para provarmos o Teorema (2.3.6), não vamos apresentar a demonstração desse resultado. De modo que ele foi enunciado somente a título de curiosidade.

2.4 Grupos de Holonomia e Curvatura - O Teorema de Ambrose-Singer

Nesta seção, vamos começar a relacionar os grupos de holonomia com a curvatura de uma conexão em uma variedade M e é claro que essas relações culminam no Teorema de Ambrose-Singer.

Nas seções anteriores, definimos grupos de holonomia em fibrados vetoriais e principais, ou seja, do modo mais geral possível. Essa não é a maneira mais usual de se introduzir grupos de holonomia. Para os leitores já familiarizados com a geometria Riemanniana, essas definições acima são apenas maneiras de generalizar uma noção que "geometricamente" já faz sentido. Em outras palavras, a maneira como os livros definem grupos de holonomia usando conexões lineares é muito mais intuitiva e natural. Para tais leitores, não é nenhuma surpresa o fato dos grupos de holonomia se relacionarem com o tensor de curvatura da conexão, porém para aqueles que so conhecem a definição mais geral, é possível que a visualização do fato não seja tão clara assim. Dito isto, é chegado o momento de aclararmos tais fatos, ou seja, é hora de relacionarmos curvatura com os nossos já conhecidos grupos de holonomia.

2.4.1 Proposição. *Seja $P \longrightarrow M$ um fibrado principal com fibra G, e D uma conexão sobre P. Então para cada $m \in M$ a curvatura $R(P, D)_m$ de D em m vive em $\mathfrak{hol}_m(P, D) \otimes \Lambda^2 T^*_m M$, onde $\mathfrak{hol}_m(P, D)$ é o subespaço vetorial de $ad(P)_m$ dado na definição* (2.3.5)

Demonstração. Pela definição de produto tensorial e o fato de $R(P, D)_m$ ser, naturalmente, um elemento de $\Lambda^2 T^*_m M$, sabemos que basta mostrarmos que se v, w são campos vetoriais em M, então $(R(P, D).v \wedge w)_m$ vive em $\mathfrak{hol}_m(P, D)$. Pela definição de $\mathfrak{hol}_m(P, D)$, se escolhermos $p \in P$ com $\pi(p) = m$, então $(R(P, D).v \wedge w)_m$ vive em $\mathfrak{hol}_m(P, D)$ se, e somente se, $\pi^*(R(P, D).v \wedge w)_p$ vive em $\mathfrak{hol}_p(P, D)$. Mas pela equação (2.6)

$$\pi^*(R(P, D).v \wedge w)_p = [\lambda(v), \lambda(w)]|_p - \lambda[v, w]|_p$$

ou seja, precisamos mostrar que para todos v, w campos vetoriais em M e $p \in P$, temos

que:
$$[\lambda(v), \lambda(w)]|_p - \lambda[v,w]|_p \in \mathfrak{hol}_p(P,D) \tag{2.11}$$

Como foi mostrado na proposição (2.1.9), $[\lambda(v), \lambda(w)]|_p - \lambda[v,w]|_p \in C_p$ e C_p foi identificado com $\mathfrak{g}$. Além disso, é claro que $\mathfrak{hol}_p(P,D) \subseteq \mathfrak{g}$. Seja $Q = \{q \in P; p \sim q\} \subseteq P$, então pelo teorema de redução (2.3.6), da seção anterior, temos que Q é um sub-fibrado principal de P com fibra $Hol_p(P,D)$ e que D se reduz a uma conexão sobre Q, i.e., em $q \in Q$, temos que $D_q \subset T_qQ$.

Ora, se considerarmos a restrição de $\lambda(v)$ à Q, vemos que ele vive em D_q, pois D_q é horizontal em Q; e assim para cada $q \in Q$, essa restrição de $\lambda(v)$, que iremos denotar por $\lambda(v)|_Q$, pertence à T_qQ, em outras palavras $\lambda(v)|_Q \in C^\infty(TQ)$. Daí temos que $\lambda(w)|_Q, \lambda([v,w])|_Q \in C^\infty(TQ)$ e assim $[\lambda(v), \lambda(w)]|_Q \in C^\infty(TQ)$. Mas como $p \in Q$, é claro que $[\lambda(v), \lambda(w)]|_p - \lambda[v,w]|_p \in T_pQ$ e como já sabemos que $[\lambda(v), \lambda(w)]|_p - \lambda[v,w]|_p \in C_p$, então ele pertence à $C_p \cap T_pQ$. Agora, lembrando mais uma vez da proposição (2.1.9), identificamos $C_p \cong \mathfrak{g}$, donde $C_p \cap T_pQ$ é identificado com $\mathfrak{hol}_p(P,D)$ e assim temos (2.11). $\square$

Como uma consequência imediata desse resultado, temos a seguinte proposição:

2.4.2 Proposição. *Seja $E \longrightarrow M$ um fibrado vetorial sobre M e ∇^E uma conexão sobre E. Então para cada $m \in M$ a curvatura $R(\nabla^E)_m$ de ∇^E em m vive em $\mathfrak{hol}_m(\nabla^E) \otimes \Lambda^2 T_m^* M$, onde $\mathfrak{hol}_m(\nabla^E)$ é o subespaço vetorial de $End(E_m)$ dado na definição (2.2.7).*

2.4.3 Teorema. ***(Ambrose-Singer,** $1^{\underline{a}}$ **versão):*** *Seja M uma variedade diferenciável, E um fibrado vetorial sobre M e ∇^E uma conexão sobre E. Fixe $x \in M$, daí $\mathfrak{hol}_x(\nabla^E)$ é uma sub-álgebra de $End(E_x) = E_x \otimes E_x^*$. Então $\mathfrak{hol}_x(\nabla^E)$ é um subespaço vetorial de $End(E_x)$ gerado por todos os elementos de $End(E_x)$ da forma $P_\gamma^{-1}[R(\nabla^E)_y.(v \wedge w)]P_\gamma$, onde $y \in M$ é um ponto, $\gamma : [0,1] \longrightarrow M$ é uma curva suave por partes tal que $\gamma(0) = x$ e $\gamma(1) = y$, $P_\gamma : E_x \longrightarrow E_y$ é o transporte paralelo sobre γ e $v, w \in T_yM$.*

Demonstração. Seja $\gamma : [0,1] \longrightarrow M$ uma curva suave por partes com $\gamma(0) = p$, $\gamma(1) = q$, $p, q \in M$ e $u, v \in T_pM$. Seja $U \subset \mathbb{R}^2$ uma vizinhança aberta de 0 e seja $f : U \to M$ uma aplicação suave com $f(0) = q = \gamma(1)$, $\partial_x f(0) = P_\gamma u$ e $\partial_y f(0) = P_\gamma v$.

Defina loops $h_s(t)$, $0 \leq s \leq 1$ baseados em q como em (2.1.11). Então as curvas suaves por partes

$$\gamma_s = \gamma^{-1} h_s \gamma$$

são loops homotopicamente nulos baseados em p.

Para $0 \leq \tau \leq 1$, seja P_τ a aplicação transporte paralelo ao longo da curva γ_s com $s = \tau^2$. Então, por (2.1.10) e pelo teorema (2.2.1.6), $P_\tau : [0,1] \longrightarrow GL(E_p)$ é uma curva continuamente diferenciável contida em $H = Hol_p^0$ e

$$\partial_\tau P_\tau|_{\tau=0} = P_\gamma^{-1} \circ R(P_\gamma v, P_\gamma u) \circ P_\gamma = R_\gamma(v,u) \in T_p H \cong \mathfrak{hol}_p(\nabla^E).$$

Assim, os endomorfirmos $R_\gamma(v,u)$ contém os geradores de $\mathfrak{hol}_p(\nabla^E)$. Daí segue que $\mathfrak{hol}_p(\nabla^E)$ é o subespaço de $End(E_p)$ com elementos $R_\gamma(v,u)$. □

Embora seja esta a versão do teorema que vamos usar, é claro que existe uma generalização deste teorema para fibrados principais, e que na verdade, pode nos dar uma primeira informação sobre os possíveis grupos de holonomia de uma conexão em fibrados vetoriais ou principais.

2.4.4 Teorema. ***(Ambrose-Singer,* $2^{\underline{a}}$ *versão):*** *Seja M uma variedade diferenciável, P um fibrado principal sobre M com fibra G e D uma conexão sobre P. Fixe $x \in M$ e defina $Q = \{q \in P; p \sim q\}$. Então $\mathfrak{hol}_p(P,D)$ é o subespaço vetorial de $\mathfrak{g}$, a álgebra de Lie de G, gerado por todos os elementos da forma $\pi^*(R(P,D).v \wedge w)_q$, $\forall q \in Q$ e $\forall v, w \in C^\infty(TM)$, onde π aplica $P \times \mathfrak{g}$ em $ad(P)$.*

Como esta versão não será a que vamos utilizar no texto, não apresentaremos demonstração. Contudo, esta pode ser encontrada em [11], vol.1, [Teo 8.1, pág 89-90]. E como consequência, temos que:

2.4.5 Proposição. *Seja $P \longrightarrow M$ um fibrado principal sobre M com fibra G. Se $dimM \geq 2$ e G é conexo, então existe uma conexão D sobre P com $Hol(P,D) = G$*

Demonstração. [ver Kobayashi & Nomizu, Foudations of Differential Geometry, vol. 1, pág 90-91] □

2.4.6 Teorema. *Seja $P \longrightarrow M$ um fibrado principal sobre M com fibra G. Suponha que $dim M \geq 2$. Então para cada subgrupo de Lie conexo $h \subset G$, existe uma conexão D sobre P com grupo de holonomia $Hol(P, D) = H$ se e somente se P se reduz a um fibrado principal Q com fibra H.*

Usando este teorema, vemos que a questão de quais grupos podem aparecer como grupos de holonomia de uma conexão num fibrado vetorial ou principal é inteiramente determinada por propriedades topológicas globais. Ou seja, é equivalente nos perguntarmos quando é que um fibrado principal admite redução à um dado subgrupo.

Essa pergunta pode ser respondida via teoria de topologia algébrica, o que foge totalmente ao escopo deste texto. Mas o que podemos "adiantar"é que a questão torna-se muito mais interessante quando restringimos essa pergunta a uma conexão linear, i.e., no fibrado tangente e, mais que isso, quando restringimos à conexão de *Levi-Civita* de uma variedade Riemanniana, o que será o tema do nosso próximo capítulo.

2.5 Grupos de Holonomia Riemannianos

No capítulo anterior falamos sobre fibrados principais e vetoriais e sobre seus grupos de holonomia, além de alguns resultados "básicos"(por favor, não entenda básico como sinônimo de fácil). Usando o Teorema de Ambrose-Singer, vimos que a classificação de quais grupos podem aparecer como grupos de holonomia não era uma pergunta extremamente interessante. Por outro lado, a medida que colocamos mais estrutura no espaço, a resposta à essa pergunta tornam-se cada vez mais surpreendente.

Nesse capítulo estaremos interessados em impor condições extras à nossa conexão e ver que faces $Hol(\nabla^E)$ pode tomar . Ora, vamos pedir que a conexão ∇^E, que o tempo todo pedimos para ser o mais geral possível, seja, na verdade, a conexão de Levi-Civita (∇), cuja existência é garantida em toda variedade Riemanniana (M, g). Vamos falar, em clima de revisão, sobre as principais propriedades de tal conexão, por exemplo, que ela satisfaz uma condição de compatibilidade com a métrica g. Visto isso, vamos definir o grupo de holonomia da métrica g, $Hol(g)$ (da maneira usual, só usando ∇ no lugar de ∇^E), e obter os principais resultados sobre ele. O foco desse capítulo será então provar que, se (M, g) for simplesmente conexa, então $Hol(g)$ será um subgrupo de Lie fechado e conexo de $SO(n)$ e, se além disso M for compacta, então ele também será compacto.

Finalmente, motivados pelo resultado anterior acima e por outro de E. Cartan, que classificou todos os subgrupos de Lie conexos e fechados de SO(n), vamos enunciar o famoso Teorema de Berger sobre grupos de holonomia, que terá o capítulo 4 inteiramente dedicado à sua prova. Este teorema, como veremos, classifica, com uma precisão admirável, as possibilidades existentes de um subgrupo de SO(n) ser grupo de holonomia de uma variedade Riemanniana simplesmente conexa. Por "precisão admirável"me refiro ao fato de que são apenas 7 as possibilidades disso acontecer.

2.5.1 Definição. *Seja M uma variedade diferenciável. Dizemos que* $\nabla : \chi(M)\times\chi(M) \longrightarrow \chi(M)$ *é uma conexão linear em M se* ∇ *satisfaz:*

(i) $\quad \nabla_{fX+gY}Z = f\nabla_X Z + g\nabla_Y Z, \ \forall f, g \in C^\infty(M)$

(ii) $\quad \nabla_X aY + bZ = a\nabla_X Y + b\nabla_X Z, \ \forall a, b \in \mathbb{R}$

(iii) $\quad \nabla_X fY = f\nabla_X Y + (Xf)Y, \ \forall f \in C^\infty(M)//$

onde $X, Y, Z \in \chi(M)$, são campos vetoriais suaves em M (note que ainda não usamos a métrica g).

Dizemos ainda que essa conexão é compatível com a métrica g se ela satisfaz a seguinte condição:

$$\nabla_X g(Y, Z) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z).$$

2.5.2 Lema. *As seguintes condições são equivalentes para uma conexão linear ∇ numa variedade Riemanniana:*

(*i*) ∇ *é compatível com g.*

(*ii*) $\nabla g \equiv 0$.

(*iii*) *Se V, W são campos vetoriais ao longo de qualquer curva γ,*

$$\frac{d}{dt} g(V, W) = g(D_t V, W) + g(V, D_t W).$$

(*iv*) *Se V, W são campos de vetores paralelos ao longo de uma curva γ, então $g(V, W)$ é constante.*

(*v*) *O transporte paralelo $P_{t_0 t_1} : T_{\gamma(t_0)} M \longrightarrow T_{\gamma(t_1)} M$ é uma isometria para cada t_0, t_1.*

Demonstração.

2.5.3 Definição. *Seja M uma variedade diferenciável e ∇ uma conexão linear em M. Definimos uma aplicação $\tau : \chi(M) \times \chi(M) \to \chi(M)$ por:*

$$\tau(X, Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y].$$

esta aplicação é chamada de tensor de torção. Além disso, se $\tau \equiv 0$, dizemos que a conexão ∇ é livre de torção.

2.5.4 Definição. *Uma conexão linear ∇ que é compatível com a métrica e livre de torção é dita ser uma* ***conexão de Levi-Civita****.*

O teorema abaixo, conhecido como teorema fundamental da geometria Riemanniana, basicamente nos diz que uma conexão de Levi-Civita sempre existe para qualquer variedade (M, g).

2.5.5 Teorema. *Seja M uma variedade diferenciável e g uma Riemanniana em M. Então existe uma única conexão linear ∇ que é livre de torção e compatível com a métrica g.*

Como este resultado está provado em absolutamente todos os livros de Geometria Riemanniana, não vamos colocar aqui a demonstração.

2.5.6 Definição. *Seja (M,g) uma variedade Riemanniana e ∇ a conexão de Levi-Civita sobre M. Definimos a curvatura R de ∇ como um $(3,1)$-campo tensorial tal que $R(X,Y) : \chi(M) \longrightarrow \chi(M)$ é dado por:*

$$R(X,Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z$$

Além disso, definimos o tensor de curvatura Riemanniano, que denotaremos por Rm (por vezes o denotaremos apenas por R, quando o contexto deixar claro) como o 4-tensor obtido baixando o último índice, i.e, definindo-o como:

$$Rm(X,Y,Z,W) = g(R(X,Y)Z,W).$$

2.5.7 Teorema. *Sejam (M,g) uma variedade Riemanniana e ∇ a conexão de Levi-Civita, então o tensor de curvatura Riemanniano satisfaz as seguintes simetrias para quaisquer campos vetoriais W, X, Y, Z:*

$$Rm(W,X,Y,Z) = -Rm(W,X,Z,Y) = -Rm(X,W,Y,Z) = Rm(Y,Z,W,X) \;\; e$$

$$Rm(W,X,Y,Z) + Rm(X,Y,W,Z) + Rm(Y,W,X,Z) = 0 \qquad (*)$$

onde a equação (*) é conhecida como $1^{\underline{a}}$ identidade de Bianchi.

Demonstração. ver [6]

Só colocamos estes resultados iniciais aqui para dar uma motivação do porquê definiremos, no próximo capítulo, um tensor de curvatura sobre um espeço vetorial da maneira que será definida, que basicamente será um (3,1)-tensor que satisfaz as mesmas simetrias do tensor acima.

2.5.8 Definição. *Seja (M,g) uma variedade Riemanniana com curvatura R^a_{bcd} (expressão local). Então a métrica g é chamada de **flat** se $R^a_{bcd} = 0$. A **curvatura de Ricci** de g é $R_{ab} = R^c_{acb}$ e a **curvatura escalar** de g é $K = g^{ab}R_{ab} = g^{ab}R^c_{acb}$. Pelas simetrias do tensor de curvatura Riemannianos, a curvatura de Ricci satisfaz $R_{ab} = R_{ba}$. Dizemos que a métrica g é **Einstein** se $R_{ab} = \lambda.g_{ab}$ para alguma constante $\lambda \in \mathbb{R}$, e ainda que g é **Ricci-flat** se $R_{ab} = 0$.*

Agora que relembramos as definições de conexão de Levi-Civita, tensor de curvatura e tudo mais, vamos ao nosso grande objeto de interesse, os grupos de holonomia Riemannianos.

2.5.9 Definição. *Seja (M,g) uma variedade Riemanniana com conexão de Levi-Civita* ∇. *Defina o* ***grupo de holonomia*** $\mathrm{Hol}(g)$ *de g como sendo* $\mathrm{Hol}(\nabla)$. *Esse grupo será chamado de* ***grupo de holonomia Riemanniano****. Além disso, também definimos o* ***grupo de holonomia restrito*** $\mathrm{Hol}^0(g)$ *de g como sendo* $\mathrm{Hol}^0(\nabla)$.

Obs: TM é um fibrado vetorial sobre M, e como a conexão de Levi-Civita ∇ é linear, i.e., definida em TM, o grupo de holonomia $\mathrm{Hol}(\nabla)$ é definido da mesma maneira que na definição (2.2.2).

No caso da definição acima, e levando em conta a observação que fizemos, o grupo de holonomia da métrica g é o conjunto de todos os transportes paralelos P_γ, onde γ é loop baseado em um ponto x (é claro que esta é a definição de $\mathrm{Hol}_x(\nabla)$, mas como já mencionamos tais grupos são conjugados um ao outro a medida que trocamos x). Mas veja, pelo lemma (2.5.2), temos que o transporte paralelo é uma isometria, portanto é óbvio que Hol(g) é um subgrupo de $O(n)$ e, mais que isso, se M for simplesmente-conexa, temos que $\mathrm{Hol}(g)$ será subgrupo conexo de $SO(n)$ (analogamente, $\mathrm{Hol}^0(g) \subseteq SO(n)$). Com isso, provamos

2.5.10 Proposição. *Seja (M,g) uma variedade Riemanniana com conexão de Levi-Civita* ∇. *Então* $\mathrm{Hol}(g)$ *é um subgrupo de* $O(n)$ *e* $\mathrm{Hol}^0(g)$ *é subgrupo conexo de* $SO(n)$.

2.5.11 Definição. *Dizemos que uma variedade Riemanniana (M,g) é* ***redutível*** *se ela é isométrica à uma variedade produto* $(M_1, M_2, g_1 \times g_2)$, *com dimensão de cada uma das variedades maior que zero. Além disso, (M,g) é* ***localmente redutível*** *se todo ponto possui uma vizinhança aberta redutível. Diremos que (M,g) é* ***irredutível*** *se ela não é localmente redutível.*

Os seguintes resultados são importantes para o trabalho, mas como não incluímos neste parte considerável da teoria de representações, não apresentaremos uma demonstração, apenas iremos referenciar.

2.5.12 Teorema. *Seja M uma variedade de dimensão n e g uma métrica Riemanniana irredutível em M. Então as representações de* $\mathrm{Hol}(g)$ *e* $\mathrm{Hol}(g)$ *sobre* $\mathbb{R}^n$ *são irredutíveis.*

Demonstração. ver [8] e [10].

2.5.13 Teorema. *Suponha que (M,g) é uma variedade Riemanniana simplesmente-conexa e completa. Então existem variedades Riemannianas simplesmente-conexas e completas* $(M_1, g_1), ..., (M_k, g_k)$ *tais que a representação dos grupos de holonomia* $\mathrm{Hol}(g_i)$ *são irredutíveis, (M,g) é isométrico ao produto* $(M_1 \times ... \times M_k, g_1 \times ... \times g_k)$ *e* $\mathrm{Hol}(g) = \mathrm{Hol}(g_1) \times ... \times \mathrm{Hol}(g_k)$.

Demonstração. ver [8] e [10].

2.5.14 Teorema. *Seja G um subgrupo de Lie de* $SO(n)$ *que age irredutivelmente em* $\mathbb{R}^n$*. Então G é fechado em* $SO(n)$*.*

Demonstração. ver [11].

Agora juntando os resultados dos teoremas (2.5.13) e (2.5.14) com os da proposição (2.5.10), segue imediatamente

2.5.15 Teorema. *Seja (M,g) uma variedade Riemanniana de dimensão n. Então* $Hol^0(g)$ *é um subgrupo de Lie compacto e conexo de* $SO(n)$*.*

Mas devido a um resultado de Élie Cartan, que pegou todos os subgrupos de Lie de SO(n) e classificou quais deles eram compactos e conexos, temos uma lista (grande, porém finita) de grupos que **podem** ser grupos de holonomia de uma variedade Riemanniana simplesmente conexa, com g completa.

Que tal colocarmos um pouco mais de estrutura no espaço? Há de se imaginar que, então, a lista dos subgrupos de Lie de SO(n) que podem ocorrer como grupos de holonomia de uma variedade Riemanniana simplesmente conexa e irredutível é ainda menor que a lista anterior. Mas em virtude do teorema (2.5.13), o conhecimento desses possíveis grupos de holonomia nos dá o entendimento total do caso geral acima, isto é, sem a irredutibilidade, com a completude da métrica. Agora, a condição da métrica ser completa tem um outro ponto de vista.

2.5.16 Definição. *Dizemos que uma variedade Riemanniana (M,g) é um* ***espaço Riemanniano simétrico*** *se para cada ponto $p \in M$ existe uma isometria $S_p : M \longrightarrow M$ tal que $S_p \circ S_p = Id$ e p é um ponto fixo isolado de S_p.*

2.5.17 Proposição. *Seja (M,g) uma um espaço simétrico Riemanniano que é conexo, simplesmente-conexo. Então g é completa.*

Demonstração. ver [9].

E esse resultado nos motiva a pensar quais seriam os possíveis grupos de holonomia de uma variedade simplesmente conexa, com g uma métrica Riemanniana sobre M que é irredutível e não-simétrica.

O matemático Marcel Berger, em seu artigo Sur les groupes d'holonomie homogènes de variétés à connexion affine et des variétés riemanniennes, Bulletin de la Société Mathématique de France, ver [2], obteve o surpreendente resultado de que a lista de tais grupo é, na verdade, bem restritiva. Iremos apresentá-la em seguida como um teorema.

O restante deste trabalho é exclusivamente dedicado à sua demonstração. É válido lembrar, mais uma vez, que a demonstração original obtida por Berger é extremamente longa, difícil e requer cálculos extenuantes, de modo que a apresentaremos numa versão "mais fácil", onde as aspas significam não tão difícil quanto a de Berger, mas ainda assim extremamente complicada. Sem mais comentários, vamos enunciar nosso tão desejado teorema:

2.5.18 Teorema. ***(Berger)*** *Suponha que M é uma variedade simplesmente conexa de dimensão n e que g é uma métrica Riemanniana em M irredutível e não-simétrica. Então exatamente um dos sete casos abaixo acontece:*

(i) $Hol(g) = SO(n)$;

(ii) $n = 2m$ *com* $m \geq 2$, *e* $Hol(g) = U(m)$ *em* $SO(2m)$;

(iii) $n = 2m$ *com* $m \geq 2$, *e* $Hol(g) = SU(m)$ *em* $SO(2m)$;

(iv) $n = 4m$ *com* $m \geq 2$, *e* $Hol(g) = Sp(m)$ *em* $SO(4m)$;

(v) $n = 4m$ *com* $m \geq 2$, *e* $Hol(g) = Sp(m)Sp(1)$ *em* $SO(4m)$;

(vi) $n = 7$ *e* $Hol(g) = G_2$ *em* $SO(7)$;

(vii) $n = 8$ *e* $Hol(g) = Spin(7)$ *em* $SO(8)$.

Capítulo 3

Sistemas de Holonomia - Uma Demonstração para o Teorema de Berger

Nesse capítulo, basicamente vamos apresentar uma demonstração do Teorema de Berger, feita por James Simons no artigo "On The Transitivity of Holonomy Systems"[14].

Simons apresenta uma outra demonstração para o teorema, muito mais simples que a do próprio Berger, mas que, ainda assim, é bastante complicada, de modo que vamos dedicar todo um capítulo deste texto à ela. Logo, tudo o que fizermos neste capítulo, incluindo a parte introdutória sobre Sistemas de Holonomia, é com o único intuito de podermos demonstrar o Teorema de Berger, que se encontra em [2].

No decorrer do capítulo, vamos provar um resultado, o qual chamaremos de Teorema 4, que diz que se o grupo G^R não age transitivamente sobre a esfera unitária S^{n-1}, então o Sistema de Holonomia é simétrico. Trataremos este como "o teorema principal", por ser a principal ferramente que usaremos para concluir a prova do Teorema de Berger. Pois, como já vimoa, a lista dos subgrupos de $SO(n)$ que agem transitivamente sobre S^{n-1} já havia sido determinada por D. Montgomery e H. Samelson em [12] e que, curiosamente, é extremamente semelhante à lista de Berger para Grupos de Holonomia de Variedades Riemannianas. As diferenças entre as duas listas serão analisadas no final do capítulo.

3.1 Definições e propriedades básicas dos sistemas de holonomia

Nesta seção vamos introduzir as definições e notações necessárias para a demonstração do Teorema 4, comentado acima, além de propriedades interessantes e úteis sobre as definições apresentadas.

3.1.1 Definição. *Seja V um espaço vetorial euclidiano de dimensão n. Por um tensor de tipo (1,3) sobre V, entendemos uma aplicação bilinear de $V \times V$ definido injetivamente sobre o espaço das transformações lineares sobre V, $\mathcal{L}(V,V)$.*

Seja P tal tensor, i.e., $P : V \times V \to L(V,V)$; vamos escrever $P(x,y) \in \mathcal{L}(V,V)$ como $P_{x,y} : V \to V$. O conjunto $\mathcal{P}$ desses tensores formam um espaço vetorial com produto interno euclidiano natural induzido pelo produto interno euclidiano de V.

3.1.2 Observação. *$\mathcal{P} \simeq V^* \times V \times V \times V$ é espaço vetorial com produto interno.*

Sabemos da teoria de representação de grupos que o grupo $O(n)$, de isometrias de V, possui uma representação natural no grupo de isometrias de $\mathcal{P}$. Esta representação é realizada definindo, para $g \in O(n)$ e $P \in \mathcal{P}$,

$$g(P)_{x,y} = g \circ P(g^{-1}(x), g^{-1}(y)) \circ g^{-1} \tag{3.1}$$

A isto corresponde uma representação de $\mathcal{A}$, a álgebra de Lie de $O(n)$, como operadores anti-simétricos sobre $\mathcal{P}$ (isto segue, como já sabemos, do fato de $\mathcal{A}$ ser o conjunto das matrizes anti-simétricas de $GL(n,\mathbb{R})$). Para $A \in \mathcal{A}$ e $P \in \mathcal{P}$ temos:

$$A(P)_{x,y} = -P_{A(x),y} - P_{x,A(y)} - [P_{x,y}, A] \tag{3.2}$$

Mas sabemos que elementos de um grupo de Lie e da sua respectiva álgebra de Lie se relacionam por:

$$\lim_{t \to 0} \frac{\exp tA(P) - P}{t} = g(P) \tag{3.3}$$

3.1.3 Definição. *Seja $R \in \mathcal{P}$. Analogamente aos capítulos anteriores, R será chamado tensor de curvatura sempre que for satisfeito:*

$$R_{x,y} = -R_{y,x} \tag{3.4}$$

$$R_{x,y}z + R_{z,x}y + R_{y,z}x = 0 \quad (\textit{Identidade de Jacobi}) \tag{3.5}$$

$$\langle R_{x,y}z, w\rangle = -\langle R_{x,y}w, z\rangle \tag{3.6}$$

$$\langle R_{x,y}z, w\rangle = \langle R_{z,w}x, y\rangle \tag{3.7}$$

Obs: Ou seja, sempre que as propriedades de simetria da definição usual (caso Riemanniano clássico) de tensor de curvatura forem satisfeitas.

As equações 3.4, 3.6 e 3.7 podem ser interpretadas da seguinte maneira:

Sabemos que existe uma identificação natural entre $\Lambda^2 V$ e $\mathcal{A}$. Usando esta identificação, (4.4) e (4.6) nos dizem que $R : \Lambda^2 V \to \Lambda^2 V$. E (4.7) nos diz que R é um operador simétrico com respeito ao produto interno canônico de $\Lambda^2 V$. Como já foi comentado, (4.5) é a nossa já conhecida Identidade de Jacobi.

3.1.4 Afirmação. *Se Q e R são tensores de curvatura, então qualquer combinação linear deles também o é. Além disso, para qualquer $g \in O(n)$ (ou $A \in \mathcal{A}$), $g(R)$ é um tensor de curvatura (ou $A(R)$).*

Demonstração. Seja $\lambda \in \mathbb{R}$, então $Q + \lambda R \in \mathcal{P}$, e além disso

- $(Q + \lambda R)_{x,y} = Q_{x,y} + \lambda R_{x,y} = -Q_{y,x} - \lambda R_{y,x} = -(Q + \lambda R)_{y,x}$, donde segue (4.4);
- $(Q + \lambda R)_{x,y}z + (Q + \lambda R)_{y,z}x + (Q + \lambda R)_{z,x}y = Q_{x,y}z + Q_{y,z}x + Q_{z,x}y + \lambda(R_{x,y}z + R_{y,z}x + R_{z,x}y) = 0 + 0 = 0$, donde segue (4.5);
- $\langle (Q + \lambda R)_{x,y}z, w\rangle = \langle Q_{x,y}z, w\rangle + \lambda\langle R_{x,y}z, w\rangle = -\langle Q_{x,y}w, z\rangle - \lambda\langle R_{x,y}w, z\rangle = -\langle (Q + \lambda R)_{x,y}w, z\rangle$, donde segue (4.6);
- $\langle (Q + \lambda R)_{x,y}z, w\rangle = \langle Q_{x,y}z, w\rangle + \lambda\langle R_{x,y}z, w\rangle = \langle Q_{zw,}x, y\rangle + \lambda\langle R_{z,w}x, y\rangle = \langle (Q + \lambda R)_{z,w}x, y\rangle$, donde segue (4.7);

e assim temos que $Q + \lambda R$ é ,de fato, tensor de curvatura.

Seja agora $g \in O(n)$, daí $g(R)_{x,y} = g \circ R_{g^{-1}(x),g^{-1}(y)} \circ g^{-1}$, donde seguem (4.4) e (4.5), naturalmente. Mas para vermos que (4.6) e (4.7) são satisfeitas, note que:

$$\langle g(R)_{x,y}z, w\rangle = \langle g \circ R_{g^{-1}(x),g^{-1}(y)} \circ g^{-1}(z), w\rangle = \langle R_{g^{-1}(x),g^{-1}(y)} \circ g^{-1}(z), g^t(w)\rangle =$$
$$= \langle R_{g^{-1}(x),g^{-1}(y)} \circ g^{-1}(z), g^{-1}(w)\rangle = \langle R_{g^{-1}(z),g^{-1}(w)} \circ g^{-1}(x), g^{-1}(y)\rangle =$$
$$= \langle g \circ R_{g^{-1}(z),g^{-1}(w)} \circ g^{-1}(x), (y)\rangle = \langle g(R)_{z,w}x, y\rangle$$

donde segue (4.7) e

$$\langle g(R)_{x,y}z, w\rangle = \langle g \circ R_{g^{-1}(x),g^{-1}(y)} \circ g^{-1}(z), w\rangle = \langle R_{g^{-1}(x),g^{-1}(y)} \circ g^{-1}(z), g^t(w)\rangle =$$
$$= \langle R_{g^{-1}(x),g^{-1}(y)} \circ g^{-1}(z), g^{-1}(w)\rangle = -\langle R_{g^{-1}(x),g^{-1}(y)} \circ g^{-1}(w), g^{-1}(z)\rangle =$$
$$= -\langle g \circ R_{g^{-1}(x),g^{-1}(y)} \circ g^{-1}(w), (z)\rangle = -\langle g(R)_{x,y}w, z\rangle$$

donde segue (4.6), o que conclui nossa demonstração □

3.1.5 Definição (Grupos de Holonomia de Espaço Vetorial)**.** *Seja R um tensor de curvatura sobre V, e G algum grupo compacto de Lie de isometrias de V com álgebra de Lie $\mathcal{G}$. G é chamado* ***grupo de holonomia*** *de R se $R_{x,y} \in \mathcal{G}$ para todo $x, y \in V$.*

Note que estamos definindo grupo de holonomia de um tensor de curvatura R num espaço vetorial euclidiano V. Daí, é natural pensarmos a primeira vista que esse grupo de holonomia é trivial. Mas note que estamos trabalhando com uma definição mais abstrata de tensor de curvatura do que a usual, que associa R a uma conexão ∇^E num certo fibrado livre de torção, portanto apesar do espaço vetorial "ser flat"(com a definição usual), não necessariamente temos $R \equiv 0$.

Uma outra pergunta natural é por que esse grupo G merece ser chamado de grupo de holonomia? Ora, na definição que apresentamos no capítulo 2 de grupos de holonomia tínhamos que $R_{x,y} \in \mathfrak{hol}(\nabla^E)$ $\therefore$ essa definição então é feita de modo a satisfazer uma propriedade desejada para grupos de holonomia.

Afirmação. Se $R_{x,y} \in \mathcal{G}$ $\forall x, y \in V$, então $g(R)_{x,y} \in \mathcal{G}$ $\forall x, y \in V$ e $\forall g \in O(n)$ (respectivamente $A \in \mathcal{A}$). Em outras palavras, se G é grupo de holonomia de R, então $\forall g \in O(n)$, G é um grupo de holonomia para $g(R)$ (e o mesmo vale para $A \in \mathcal{A}$).

Demonstração. Ora, seja $R_{x,y} \in \mathcal{G}$. Daí sabemos que $g(R)_{x,y} = g \circ R_{g^{-1}(x),g^{-1}(y)} \circ g^{-1}$. Mas G é grupo de holonomia para R, donde $R_{g^{-1}(x),g^{-1}(y)} \in \mathcal{G}$ e assim $g \circ R_{g^{-1}(x),g^{-1}(y)} \circ g^{-1} \in \mathcal{G}$. Os outros casos são análogos. □

Já definimos, nesse ponto, o que é um grupo de holonomia G e um tensor de curvatura R, ambos num espaço vetorial V. Desse modo

3.1.6 Definição. *Uma tripla $[V, R, G]$ consistindo de um espaço vetorial euclidiano, V, um tensor de curvatura, R, e um grupo de holonomia* ***conexo****, G, é chamado um sistema de holonomia.*

Obs: Se $[V, R, G]$ é sistema de holonomia, então G é grupo compacto **e** conexo.

3.1.7 Definição. *Seja $S = [V, R, G]$ um sistema de holonomia. Vamos denotar por $G(R)$ o espaço gerado por somas finitas de todos os $g(R)$ tais que g percorre G.*

3.1.8 Afirmação. *Por* (3.1), (3.2) *e* (3.3) *é válido que:*
(a) *Se $Q \in G(R), g \in G$, então $g(Q) \in G(R)$*
(b) *Se $Q \in G(R), A \in \mathcal{G}$, então $A(Q) \in G(R)$*
(c) *Se $Q \in G(R)$, então $Q_{x,y} \in \mathcal{G}$ $\forall x, y \in V$*

Demonstração. (a) É trivial.

(b) Tome $Q \in G(R)$ e $A \in \mathcal{G}$, então

$$Q = g_1(R) + ... + g_k(R) \Longrightarrow A(Q)_{x,y} = -Q_{A(x),y} - Q_{x,A(y)} - [Q_{x,y}, A]$$

$$= -g_1(R)_{A(x),y} - .... - g_k(R)_{A(x),y} - g_1(R)_{x,A(y)} - .... - g_k(R)_{x,A(y)} - [g_1(R)_{x,y}, A] - ... - [g_k(R)_{x,y}, A] =$$
$$\sum_{i=1}^{k} -g_i(R)_{A(x),y} + \sum_{i=1}^{k} -g_i(R)_{x,A(y)} + \sum_{i=1}^{k} -[g_i(R)_{x,y}, A].$$

donde cada um desses pertence a $\mathcal{G}$, pois G é também grupo de holonomia de $g(R)$, $\forall g \in G$, por uma afirmação anterior. Agora, por (3.3), todo elemento da álgebra $\mathcal{G}$ se relaciona com um elemento do tipo $g(R)$ e assim temos **(b)**.

(c) Tome $Q \in G(R)$, então

$$Q = g_1(R) + .. + g_k(R) \therefore Q_{x,y} = g_1(R)_{x,y} + ... + g_k(R)_{x,y},$$

onde G é também um grupo de holonomia para $g_i(R)$ $\forall i = 1,..,k$ $\therefore$ $g_i(R)_{x,y} \in \mathcal{G}$ $\forall x, y \in V, \forall i = 1, ..., k \therefore Q_{x,y} \in \mathcal{G}$ $\square$

3.1.9 Definição. *$\mathcal{G}^R$ é o subespaço de $\mathcal{G}$ gerado por todos os $Q_{x,y}$ com $Q \in G(R)$ e $x, y \in V$.*

3.1.10 Afirmação. *Com esta definição, $\mathcal{G}^R$ é um ideal de $\mathcal{G}$, ou seja, $(\mathcal{G}^R, \circ)$ é um subgrupo de $(\mathcal{G}, \circ)$ e $\forall Q_{x,y} \in \mathcal{G}^R$ e $P_{z,w} \in \mathcal{G}$, temos que $Q_{x,y}P_{z,w}$ e $P_{z,w}Q_{x,y} \in \mathcal{G}^R$*

Demonstração. De fato, $(\mathcal{G}^R, \circ)$ é subgrupo de $\mathcal{G}$, por definição. Agora tome $A \in \mathcal{G}, Q_{x,y} \in \mathcal{G}^R$. Por (3.2), onde é definida a operação $A(Q)$, temos que; provar que $A(Q) \in \mathcal{G}^R$. Mas por (b), como $Q \in G(R)$ e $A \in \mathcal{G}$, temos $A(Q) \in G(R)$. Logo como $\mathcal{G}^R$ é o subespaço gerado por todos os $K_{x,y}$ com $K \in G(R), x, y \in V$, donde $A(Q)_{x,y} \in \mathcal{G}^R$ trivialmente $\square$

Da teoria de grupos de Lie compactos, temos o seguinte resultado:

Afirmação: Seja G um grupo de holonomia compacto e $\mathcal{G}^R$ definido como acima. Então $\mathcal{G}^R$ possui um ideal complementar, $\mathcal{G}_R$, i.e., $\mathcal{G} = \mathcal{G}^R + \mathcal{G}_R$, onde $\mathcal{G}^R \bigcap \mathcal{G}_R = \{0\}$, $[\mathcal{G}^R, \mathcal{G}_R] = 0$, $[\mathcal{G}^R, \mathcal{G}^R] \subseteqq \mathcal{G}^R$ e $[\mathcal{G}_R, \mathcal{G}_R] \subseteqq \mathcal{G}_R$.

3.1.11 Proposição. *Se $A \in \mathcal{G}_R$, então $A(Q) = 0$ para qualquer $Q \in G(R)$.*

Demonstração. Sejam $x, y, z, w \in V$ quaisquer, daí

$$\langle A(Q)_{x,y}z, w\rangle = \left\langle Q_{A(x),y}z, w\right\rangle - \left\langle Q_{x,A(y)}z, w\right\rangle - \langle [Q_{x,y}, A]z, w\rangle$$

Como $A \in \mathcal{G}_R$ e $Q \in G(R)$, então $Q_{x,y} \in \mathcal{G}^R$ para quaisquer $x, y \in V$ e $[Q_{x,y}, A] = 0 \therefore$ $\langle A(Q)_{x,y}z, w\rangle = -\left\langle Q_{A(x),y}z, w\right\rangle - \left\langle Q_{x,A(y)}z, w\right\rangle$

Agora por (3.7) temos

$$\langle A(Q)_{x,y}z, w\rangle = -\langle Q_{z,w}A(x), y\rangle - \langle Q_{z,w}x, A(y)\rangle$$

e note também que

$$-\langle [Q_{z,w}, A]x, y\rangle = -\langle (Q_{z,w}A - AQ_{z,w})x, y\rangle = -\langle Q_{z,w}A(x), y\rangle + \langle AQ_{z,w}x, y\rangle =$$
$$-\langle Q_{z,w}A(x), y\rangle + \left\langle Q_{z,w}A(x), A^t y\right\rangle = -\langle Q_{z,w}A(x), y\rangle - \langle Q_{z,w}x, A(y)\rangle, \text{ donde}$$

$$\langle A(Q)_{x,y}z, w\rangle = -\langle [Q_{z,w}, A]x, y\rangle = 0 \therefore \langle A(Q)_{x,y}z, w\rangle = 0$$

$\forall x, y, z, w \in V \therefore A(Q) = 0$ para qualquer $Q \in G(R)$ $\square$

3.1.12 Definição. *Um sistema de holonomia, $S = [V, R, G]$, é dito ser **simétrico** se $g(R) = R$ para todo $g \in G$.*

Afirmação: $g(R) = R\ \forall g \in G \iff A(R) = 0\ \forall A \in \mathcal{G}$.

Demonstração. Inicialmente lembremos que $\mathcal{G}^R = \text{span}\{Q_{x,y}; Q \in G(R)\}$. Assim tomemos $Q \in G(R)$; donde $Q_{x,y} = \sum_{i=1}^k g_i(R)_{x,y} = \sum_{i=1}^k g_i \circ R_{g_i^{-1}(x), g_i^{-1}(y)} \circ g_i^{-1} \Longrightarrow A(Q)_{x,y} = \sum_{i=1}^k A(g_i \circ R_{g_i^{-1}(x), g_i^{-1}(y)} \circ g_i^{-1})\ \forall A \in \mathcal{G}$. É claro que $A(R) = 0\ \forall A \in \mathcal{G} \iff A(Q) = 0\ \forall A \in \mathcal{G}, \forall Q \in G(R)$. Nesse caso $\mathcal{G}^R = \text{span}\{Q_{x,y}; Q \in G(R)$ e $Q_{x,y}(P) = 0\ \forall P \in G(R)\}$, em particular $Q_{x,y}(Q) \equiv 0 \therefore \mathcal{G}^R = \{0\} \Longrightarrow G(R) = \langle R\rangle$ é trivial $\Longrightarrow g(R) = R$.
Agora se $g(R) = R\ \forall g \in G$, então $G(R)$ é trivial. Daí $\mathcal{G}^R = \{0\} \Longrightarrow A(R) = 0\ \forall A \in \mathcal{G}$, pois $\mathcal{G} = \mathcal{G}^R + \mathcal{G}_R$ e pela proposição (3.1.11), $A(R) = 0$ se $A \in \mathcal{G}_R$ $\square$

Logo é equivalente dizer que um sistema de holonomia $S = [V, R, G]$ é simétrico se $A(R) = 0\ \forall A \in \mathcal{G}$.

Esta definição de espaços simétricos é uma das mais fundamentais para a demonstração do nosso objeto de estudos principal, o Teorema de Berger. Vamos agora discutir algumas das propriedades principais e que precisaremos usar sobre os espaços simétricos. Vale lembrar que os fatos a serem apresentados são devidos à E. Cartan.

Suponhamos S simétrico. Seja $J = \mathcal{G}^R \oplus V$ como espaço vetorial. Vamos definir um colchete em J:

$$\begin{aligned} [A, B]_J &= [A, B] && \text{para } A, B \in \mathcal{G}^R \\ [x, y]_J &= R_{x,y} && \text{para } x, y \in V \\ [A, x]_J &= A(x) && \text{para } A \in \mathcal{G}^R, x \in V \end{aligned}$$

O sub-índice J que colocamos no lado esquerdo das equações acima é só para deixar claro como é a definição deste, mas no texto vamos usualmente denotar o colchete de J

como [,].

É claro que [,] é uma aplicação bilinear em J, e como $[x, A] = [A^t(x), Id] = -[A(x), Id] = -A(x)$, temos que [,] também é anti-simétrico em J. Além disso, o único caso não-trivial para termos a identidade de Jacobi é: $x, y \in V, A \in \mathcal{G}^R$, daí

$$[A,[x,y]] + [y,[A,x]] + [x,[y,A]] = [A, R_{x,y}] + [y, A(x)] + [x, -A(y)] =$$
$$-[R_{x,y}] - R_{A(x),y} - R_{x,A(y)} = A(R)_{x,y} = 0, \text{ pois S é simétrico.}$$

Assim, J é também uma álgebra de Lie. Além disso, $J = \mathcal{G}^R \oplus V$ onde

$$[\mathcal{G}^R, \mathcal{G}^R] \subseteqq \mathcal{G}^R$$
$$[\mathcal{G}^R, V] \subseteqq V$$
$$[V, V] \subseteqq \mathcal{G}^R$$

Élie Cartan, em seu artigo [5], prova que à tal álgebra J, corresponde um espaço simétrico Riemanniano **simplesmente conexo**, M, o qual seu espaço tangente em um ponto pode ser identificado com V, seu tensor de curvatura é R e sua álgebra de holonomia é $\mathcal{G}^R$. Além disso, no caso em que $\mathcal{G}^R$ age irredutivelmente sobre V, a **álgebra de isotropia**[1] de M é a álgebra de holonomia, e assim $\mathcal{G}^R = \mathcal{G}$.

A aplicação deste resultado enunciado acima tornar-se-á mais clara no decorrer do capítulo, pois o Teorema de Berger é válido para variedades riemannianas e até agora estamos trabalhando com espaços vetoriais, de modo que em algum momento (será feito em detalhes, é claro) vamos aplicar esse resultado para obter uma prova contundente para o nosso já conhecido Teorema de Berger.

Continuando com mais algumas propriedades fundamentais para o nosso posterior estudo da transitividade de sistemas de holonomia, seja $S = [V, R, G]$ um tal sistema. Se $W \subseteqq V$ é um subespaço tal que $R_{w_1,w_2}(W) \subseteqq W$ para todo $w_1, w_2 \in W$, R claramente define um tensor de curvatura em W denotado por $R|_W$.

[1]Lembre que dada a ação de um grupo G sobre uma variedade M, dizemos que $G_x = \{g \in G; g.x = x\}$ é o grupo de isotropia de x. E sabemos que G_x é o subgrupo de Lie de G. Além disso, a álgebra de Lie $\mathcal{G}_x$ de G_x é chamada álgebra de isotropia.

Suponha que $V_1, ..., V_k$ são espaços euclianos, e $R^1, ..., R^k$ tensores de curvatura sobre eles, respectivamente. Seja $V = V_1 \oplus V_2 \oplus ... \oplus V_k$ munido com uma estrutura standard de espaço eucliano. Para cada $x \in V$, seja x_i sua componente em V_i. Nós definimos $R = R^1 \times ... \times R^k$ da seguinte maneira:

$$R_{x,y}z = \sum_i R^i_{x_i,y_i} z_i \tag{3.8}$$

3.1.13 Afirmação. *Assim definido, R é um tensor de curvatura em V*

Demonstração. Basta verificar que as equações 3.4, 3.5, 3.6, 3.7 são satisfeitas, o que é trivial de ser verificado. □

Mais que um tensor de curvatura em V, R ainda satisfaz:

$$R_{x_i,y_j} = 0 \text{ para } i \neq j \tag{3.9}$$

que pode ser verificada pelo simples fato de $R_{x_i,y_j}z = R^i_{x_i,0}z_i + R^j_{0,y_j}z_j = 0$

Por outro lado, suponha que R é um tensor de curvatura sobre V, e $V = V_1 \perp V_2 \perp ... \perp V_k$ e que R satisfaz $R_{x_i,y_i} = 0$ $(i \neq j)$. Então para $x_i, y_i \in V_i$ e $z_j \in V_j$ $(i \neq j)$ temos, pela identidade de Jacobi:

$$R_{x_i,y_i}z_j + R_{z_j,x_i}y_i + R_{y_i,z_j}x_i = 0 \Longrightarrow$$

$$R_{x_i,y_i}z_j = -R_{z_j,x_i}y_i - R_{y_i,z_j}x_i = 0, \text{ pois } R_{x_i,y_j} = 0 (i \neq j)$$

Assim $R_{x_i,y_i}(V_i^{\perp}) = 0$ e então

$$R_{x,y}z = \sum_{i=1}^{k} R_{x_i,y_i} z_i.$$

Como R_{x_i,y_i} satisfaz $\langle R_{x_i,y_i}z_i, w_j\rangle = -\langle R_{x_i,y_i}w_j, z_i\rangle = 0$ $\forall x_i, y_i \in V_i$ e $\forall w_j \in V_j$, $i \neq j$ $\therefore$ $R_{x_i,y_i}(V_i) \subsetneqq V_i$ $\forall x_i, y_i \in V_i$. Defina $R^i = R|_{V_i}$.

Se colocarmos $\bar{\mathrm{V}} = V_1 \oplus ... \oplus V_k$, então $\bar{\mathrm{R}} = R^1 \times ... \times R^k$ é um tensor de curvatura sobre $\bar{\mathrm{V}}$. E seja $\varphi : \bar{\mathrm{V}} \longrightarrow V$ o isomorfismo natural entre $\bar{\mathrm{V}}$ e V.

Afirmação: De acordo com as definições acima, temos que:

$$\varphi(\bar{\mathrm{R}}) = R \tag{3.10}$$

Demonstração. Tome $x, y, z \in V$ arbitrários. Como φ é isomorfismo, então $\exists!$ $\bar{\mathrm{x}}$,$\bar{\mathrm{y}}$,$\bar{\mathrm{z}} \in V$ tais que $\varphi(\bar{\mathrm{x}}) = x$, $\varphi(\bar{\mathrm{y}}) = y$, $\varphi(\bar{\mathrm{z}}) = z$. Assim,

$$\varphi(\bar{\mathrm{R}})_{x,y}z = \varphi(\bar{\mathrm{R}}_{\varphi^{-1}(x),\varphi^{-1}(y)}\varphi^{-1}(z)) = \varphi(\bar{\mathrm{R}}_{\bar{\mathrm{x}},\bar{\mathrm{y}}}\bar{\mathrm{z}}) =$$

$$\varphi(\sum_{i=1}^{k} \bar{\mathrm{R}}^i_{\bar{\mathrm{x}}_i,\bar{\mathrm{y}}_i}\bar{\mathrm{z}}_i) = \sum_{i=1}^{k} \varphi(\bar{\mathrm{R}}^i_{\bar{\mathrm{x}}_i,\bar{\mathrm{y}}_i}\bar{\mathrm{z}}_i) = \sum_{i=1}^{k} R_{x_i,y_i}z_i = R_{x,y}z \quad \square$$

3.1.14 Definição. *(Isomorfismo de Sistemas de Holonomia) Sejam $S_1 = [V_1, R^1, G_1]$ e $S_2 = [V_2, R^2, G_2]$ sistemas de holonomia. Suponha que φ é uma isometria de V_1 definida sobrejetivamente em V_2. Então φ é dito ser um* ***isomorfismo*** *de S_1 sobre S_2 se:*

$$\varphi(R^1) = R^2 \; e \; \varphi \circ G_1 \circ \varphi^{-1} = G_2$$

3.1.15 Definição. *(Redutibilidade) Um sistema de holonomia $S = [V, R, G]$ é dito ser* ***redutível*** *se G age redutivelmente*[1] *sobre V.*

Sejam $V_1, ..., V_p$ espaços euclidianos e $G_1, ..., G_p$ grupos de isometrias sobre estes espaços, respectivamente. Definimos $G = G_1 \times ... \times G_p$ de modo a ser um grupo de isometrias sobre $V_1 \oplus ... \oplus V_p$ da seguinte maneira:

$$(g_1, ..., g_p)((v_1, ..., v_p)) = (g_1(v_1), ..., g_p(v_p))$$

Donde é imediato verificar que G será um grupo de isometrias sobre V.

3.1.16 Definição. *(Produto Direto) Sejam $S_1, ..., S_p$ sistemas de holonomia com $S_i = [V_i, R^i, G_i]$, $\forall i = 1, ..., p$. Definiremos seu* ***produto direto*** *como sendo o seguinte sistema de holonomia:*

$$S_1 \times ... \times S_p = [V_1 \oplus ... \oplus V_p, R^1 \times ... \times R^p, G_1 \times ... \times G_p]$$

[1]Lembre que uma G-ação sobre V é dita ser *irredutível* se não existem subespaços próprios de V invariantes pela ação de G em V, exceto $\{0\} \subset V$. E esta G-ação será **redutível** caso contrário.

3.1.17 Lema. *Seja G um grupo de isometrias compacto agindo irredutivelmente sobre um espaço euclidiano V. Denote por $\mathcal{G}$ sua álgebra de Lie, e seja $\mathcal{H}$ um ideal*[2] *de $\mathcal{G}$. Então $H := \exp\mathcal{H}$ é um subgrupo compacto de G.*

Demonstração. Começamos a provar este resultado com as seguintes afirmações:

Afirmação 1: Como $g \subset O(V)$(grupo ortogonal de V) é compacto, $\mathcal{G}$ pode ser decomposta como $\mathcal{G} \cong \mathcal{G}_1 \oplus ... \oplus \mathcal{G}_p \oplus \mathcal{T}$, onde cada $\mathcal{G}_i$ é simples[1] e $\mathcal{T}$ é abeliano, sendo $\mathcal{T}$ a álgebra de Lie do centro de G.

Afirmação 2: Seja $\mathcal{T}$ uma álgebra de Lie abeliana de algum grupo de Lie T. Se $\dim\mathcal{T} \geq 2$, então $\exists! t \in \mathcal{T}$ $(t \neq 0)$ tal que t age singularmente sobre V, i.e., $K = \{v \in V; t(v) = 0\} \neq 0$ (não é trivial).

Assumindo esses dois resultados, vamos provar o lema. Pela afirmação 2, como t pertence a álgebra de Lie do centro de G, onde t comuta com todos os elementos de $\mathcal{G}$, então K (definido como acima) é subespaço invariante sob $\mathcal{G}$. Mas isso contradiz a hipótese de irredutibilidade, e assim segue que $\dim\mathcal{T} = 1$.

Daí se $\mathcal{J}$ é um ideal de $\mathcal{G}$, $\mathcal{J}$ é a soma de uma coleção de $\mathcal{G}_i$ mais, possivelmente, um $\mathcal{T}$.

Afirmação 3: Se $\mathcal{G}_i$ é simples com um produto interno invariante positivo definido, então $\exp\mathcal{G}_i$ é compacto.

Também segue que $\exp\mathcal{T}$ é compacto, pois ele é a componente conexa do centro de G que contém a identidade. Assim, $\exp\mathcal{J}$ (obviamente fechado) é coberto por um produto direto de grupos compactos e então é compacto $\square$(3.1.17)

3.1.18 Proposição. *Sejam $S = [V, R, G]$ um sistema de holonomia e $G^R := \exp\mathcal{G}^R$. Então G^R é compacto, e assim $S^R = [V, R, G^R]$ é também um sistema de holonomia.*

Demonstração. É possível decompor V da seguinte maneira: $V = V_1 \oplus ... \oplus V_p$, onde cada V_i é invariante sob G^R, $G^R\big|_{V_1}$ é trivial, e $G^R\big|_{V_i}$ é irredutível para $i \geq 2$ (ver [8]).

Agora, se $A \in \mathcal{G}^R$ (i.e., $A = \sum_k Q^k_{x_k,y_k}; Q^k \in G(R)\ \forall k$) e $v_i \in V_i, v_j \in V_j$, então se $i \neq j$ temos $\langle A(v_i), v_j\rangle = \left\langle \sum_k Q^k_{x_k,y_k}(v_i), v_j\right\rangle = \sum_k \left\langle Q^k_{x_k,y_k}(v_i), v_j\right\rangle = \sum_k \left\langle g \circ R_{g^{-1}(x_k),g^{-1}(y_k)}(v_i) \circ g^{-1}, v_j\right\rangle =$

[2] Por um **ideal** de um grupo de Lie entendemos que $[X, Y] \in \mathcal{H}$, $\forall X \in \mathcal{H}$, $\forall Y \in \mathcal{G}$.

[1] Dizemos que uma álgebra de Lie $\mathcal{G}$ é **simples** se $\dim\mathcal{G} > 1$ e se ela não contém ideais não triviais.

0, pois em todos os casos:

- se $g^{-1}(x_k) \in V_w$ e $g^{-1}(y_k) \in V_z, w \neq z$, temos $\sum_k \left\langle g \circ R_{g^{-1}(x_k),g^{-1}(y_k)}(v_i) \circ g^{-1}, v_j \right\rangle =$ 0;
- se $g^{-1}(x_k), g^{-1}(y_k) \in V_w, w \neq i$, temos que $\sum_k \left\langle g \circ R_{g^{-1}(x_k),g^{-1}(y_k)}(v_i) \circ g^{-1}, v_j \right\rangle = 0$;
- se $g^{-1}(x_k), g^{-1}(y_k) \in V_i$, então $R_{g^{-1}(x_k),g^{-1}(y_k)}(V_i) \subseteqq V_i \therefore \langle V_i, V_j \rangle = 0$ pois $V_i \oplus V_j$ e assim $\sum_k \left\langle g \circ R_{g^{-1}(x_k),g^{-1}(y_k)}(v_i) \circ g^{-1}, v_j \right\rangle = 0$.

Em particular, se $A = Q_{x,y}$ para $Q \in G(R)$ arbitrário e quaisquer $x, y \in V$, $\langle Q_{x,y}v_i, v_j = 0 \rangle$. Por 3.7, $\left\langle Q_{v_i,v_j}x, y \right\rangle = 0 \therefore Q_{v_i,v_j} = 0$ para todo $Q \in G(R)$.

Do fato de $R_{x_i,y_j} = 0$ se $i \neq j$ (3.9) temos,

$$Q_{x,y} = \sum_{i=1}^{p} Q_{x_i,y_i}, \tag{a}$$

por definição de $Q_{x,y}$.

$$Q_{x_i,y_i}(V_j) = 0 \qquad (i \neq j), \tag{b}$$

pois $Q_{x_i,y_i}(V_i) = g \circ R_{x_i,y_i}(V_j) \circ g^{-1}$ e $R_{x_i,y_i}(V_i^{\perp}) = 0 \therefore$ segue (b)

$$Q_{x_i,y_i}(V_i) \subseteqq V_i, \tag{c}$$

pois $R_{x_i,y_i}(V_i) \subseteqq V_i$.

Seja $\mathcal{G}_i^R$ o espaço vetorial gerado por todos os Q_{x_i,y_i}, com Q percorrendo $G(R)$, e x_i, y_i percorrendo V_i. Então, pelo fato de $G^R\big|_{V_1}$ ser trivial, $\mathcal{G}_1^R = 0$, e por (a), (b) e (c) temos:

$$\mathcal{G}_i^R, i = 2, ..., p \text{ são linearmente independentes}, \tag{d}$$

pois $Q_{x_i,y_i}(V_j) = 0$ e $Q_{x_i,y_j} = 0$ se $(i \neq j)$.

$$[\mathcal{G}_i^R, \mathcal{G}_j^R] = 0 \text{ se } (i \neq j), \tag{e}$$

pois $\mathcal{G}_i^R$ é o espaço vetorial gerado por todos os Q_{x_i,y_i} com Q percorrendo $G(R)$ e $Q_{x_i,y_i}(V_i) \subseteqq V_i$ e $Q_{x_i,y_j}(V_j) = 0$.

$$\mathcal{G}^R = \mathcal{G}_2^R + ... + \mathcal{G}_p^R, \tag{f}$$

pois $\mathcal{G}_1^R = 0$ e por (d).

$$\mathcal{G}_i^R(V_i) \subseteqq V_i \text{ e } \left.\mathcal{G}_i^R\right|_{V_i} \text{ é irredutível para } i \geq 2, \tag{g}$$

o primeiro por definição e por (c) e o segundo porque $\left.G^R\right|_{V_i}$ é irredutível para $i \geq 2$.

Agora, por (a)-(g) temos que $\mathcal{G}_i^R$ é ideal de $\mathcal{G}^R$ e já sabemos que $\mathcal{G}R$ é ideal de $\mathcal{G}$. Além disso, pelas propriedades (b)-(g) temos que

$$V_i^\perp \overset{(b)}{=} \{v \in V; Q_{x_i,y_i}(v) = 0 \text{ e } x_i, y_i \in V_i\} \underset{(\mathrm{g})}{\overset{\text{def: } \mathcal{G}_i^R}{=}} \{v \in V; \mathcal{G}_i^R(v) = 0\}$$

Como $\mathcal{G}_i^R$ é ideal de $\mathcal{G}^R$, $V_i^\perp$ tem que ser invariante sob $\mathcal{G}^R$ e então sob $\mathcal{G}$. Daí cada V_i, incluindo V_1, é invariante sob G. Agora se $I \geq 2$, então o fato de $\left.\mathcal{G}_i^R\right|_{V_i}$ ser irredutível, implica que $G|_{V_i}$ é irredutível. Além disso, como $\left.\mathcal{G}_i^R\right|_{V_i^\perp} = 0$, o $\mathcal{G}_i^R$ pode ser considerado na verdade como um ideal de $\mathcal{G}|_{V_i}$. Somando isso ao fato de $G|_{V_i}$ ser compacto, o lema (3.1.17) implica que $G_i^R := \exp(\mathcal{G}_i^R|_{V_i})$ é compacto, donde segue que $\exp(\mathcal{G}_i^R)$ é compacto. E finalmente, como (por (f)) $a\mathcal{G}^R$ é uma soma finita dos espaços vetoriais $\mathcal{G}_i^R$, $i \geq 2$ e $[\mathcal{G}_i^R, \mathcal{G}_j^R] = 0$, i.e., os elementos de $\mathcal{G}_i^R$ e $\mathcal{G}_j^R$ comutam, então $G^R = \exp(\mathcal{G}^R)$ será compacto. $\square$ (Prop (3.1.18))

De acordo com as definições feitas na demonstração da proposição (3.1.18), tínhamos que V foi decomposto como $V = V_1 \oplus V_2 \oplus ... \oplus V_p$, onde cada V_i era invariante pela ação de G^R, $G^R|_{V_1}$ era trivial e $G^R|_{V_i}$ era irredutível para $i \geq 2$. Se definimos $S_i = [V_i, R^i, G_i^R]$, então segue que S_1 é trivial, ou seja, $R^1 = 0$ e $G_1^R = 1$ e S_i é irredutível para $i \geq 2$.

3.1.19 Corolário. *S^R é isomorfo à $S_1 \times S_2 \times ... \times S_p$. Além disso, se para alguma outra coleção $\{T_j\}$ de sistemas de holonomia com T_1 trivial e T_j irredutível para $j \geq 2$, $S^R = T_1 \times T_2 \times ... \times T_q$, então $\{S_i\} = \{T_i\}$.*

Demonstração. Pela construção feita na prova da proposição (3.1.18), onde $V = V_1 \oplus V_2 \oplus ... \oplus V_p$, $G^R|_{V_1}$ é trivial, $G^R|_{V_i}$ é irredutível e a definição de $S_i = [V_i, R^i, G_i^R]$ $(R^i = R|_{V_i})$, segue que $S^R \cong S_1 \times ... \times S_p$.

Suponhamos agora que exista essa família $\{T_i\}$ satisfazendo as hipóteses do corolário. Analogamente à prova da proposição (3.1.18), defina $\tilde{\mathcal{G}}_i^R$ como o espaço gerado por todas as Q_{x_i,y_i}, com Q percorrendo $G(R)$ e x_i, y_i percorrendo T_i. Então $\tilde{\mathcal{G}}_1^R = 0$ e (d)-(g) são satisfeitas. Por (d), $q = p$ e por (d)-(g) temos que $\{\mathcal{G}_i^R\}_{i=2}^p$ e $\{\tilde{\mathcal{G}}_i^R\}_{i=2}^p$ são linearmente independentes (cada um deles) e $\mathcal{G}^R = \mathcal{G}_2^R + ... + \mathcal{G}_p^R$, donde segue que os únicos subespaços invariantes de V sobre os quais G^R age irredutivelmente (a irredutibilidade segue de (e)-(g)) são os V_i para $i \geq 2$. Daí $\{S_i\} = \{T_i\}$. $\square$

3.2 Subespaços Flat e Transitividade

Nesta seção vamos apresentar a definição de subespaços "flat", que de acordo com o que vamos ver, nos remete a uma noção do espaço ser "plano"em relação ao tensor de curvatura R que estaremos trabalhando. Depois apresentaremos a definição de transversalidade para os grupos G^R definidos na seção anterior.

A seção culmina num teorema onde relacionaremos de alguma maneira esses espaços "flat"com a transversalidade do grupo G^R. Em adianto, provaremos que um grupo de holonomia age transversalmente sobre a esfera unitária S^1 se, e somente se, **não existem** subespaços flat não triviais de V (o espaço vetorial do nosso sistema de holonomia $S = [V, R, G]$ em questão).

3.2.1 Definição. *Dado um sistema de holonomia $S = [V, R, G]$, dizemos que um subespaço $W \subseteq V$ é **flat** se $Q_{w,v} = 0$ para quaisquer $w, v \in W$ e qualquer $Q \in G(R)$.*

Afirmação: Segue diretamente da definição que se W é flat, então:

$$Q_{g(w),g(v)} = 0 \text{ para todo } Q \in G(R), g \in G, \text{ e } w, v \in W \tag{3.11}$$

Demonstração. Tome $Q \in G(R)$ qualquer e h percorrendo G, então

$$Q = \sum_{i=1}^{k} h_i(R) \therefore Q_{w,v} = \sum_{i=1}^{k} h_i(R)_{w,v} = \sum_{i=1}^{k} h_i \circ R_{h_i^{-1}(w),h_i^{-1}(v)} \circ h_i^{-1} = 0$$

por hipótese e assim

$$Q_{g(w),g(v)} = \sum_{i=1}^{k} h_i(R)_{g(w),g(v)} = \sum_{i=1}^{k} h_i \circ R_{h_i^{-1}\circ g(w),h_i^{-1}\circ g(v)} \circ h_i^{-1} =$$

$$\sum_{i=1}^{k} h_i \circ (h_i^{-1} \circ g) \circ (h_i^{-1} \circ g)^{-1} \circ R_{h_i^{-1}\circ g(w),h_i^{-1}\circ g(v)} \circ (h_i^{-1} \circ g) \circ (h_i^{-1} \circ g)^{-1} \circ h_i^{-1} =$$

$$\sum_{i=1}^{k} h_i \circ (h_i^{-1} \circ g) \circ [(h_i^{-1} \circ g)^{-1}(R)_{w,v}] \circ (h_i^{-1} \circ g)^{-1} \circ h_i^{-1} = 0,$$

pois $(h_i^{-1} \circ g)^{-1}(R)_{w,v} \in G(R) \therefore (h_i^{-1} \circ g)^{-1}(R)_{w,v} = 0$ pela hipótese de W ser flat. E assim segue (3.11) $\square$

Afirmação: Se W é subespaço flat de V, então

$$g(W) \text{ é flat para qualquer } g \in G. \tag{3.12}$$

Demonstração. Segue diretamente de (3.11) □

Afirmação: Se W é um subespaço flat de V então

$$Q_{A(w),v} + Q_{w,A(v)} = 0 \text{ para todo } Q \in G, A \in \mathcal{G} \text{ e } w, v \in W. \tag{3.13}$$

Demonstração. Por (b), sabemos que se $Q \in G(R)$ e $A \in \mathcal{G}$, então $A(Q) \in G(R)$. Donde, pela hipótese de W ser flat, temos que $A(Q)_{w,v} = 0 \ \forall w, v \in W$. Mas, por definição

$$0 = A(Q)_{w,v} = -Q_{A(w),v} - Q_{w,A(v)} - [Q_{w,v}, A] = -Q_{A(w),v} - Q_{w,A(v)}$$

□

Até aqui, apresentamos a definição de subespaço flat e provamos algumas propriedades básicas sobre este tipo de subespaço. Agora vamos provar um resultado que, junto com a proposição (3.1.18), será fortemente usado na demonstração do teorema (3.2.4), que será o principal resultado desta seção e que, por sua vez, será fortemente usado na demonstração do resultado que nos dará o passo fundamental (e final) para provar o teorema de Berger.

Vale a pena recordarmos que se $w \subseteq V$ é subespaço, então definimos $W^{\perp} \subseteq V$ como o subconjunto de V tal que, dados $w \in W, w^{\perp} \in W^{\perp}$, temos $\left\langle w, w^{\perp} \right\rangle = 0$, on $\langle ., . \rangle$ é o produto interno definido em V. Esse resultado, que será tratado no texto como um lema, nos dá uma importante propriedade sobre os espaços flat, relacionando-os com "rotações"deste espaço por elemento de $\mathcal{G}^R$.

3.2.2 Lema. *Um subespaço $W \in V$ é flat se, e somente se, $A(W) \subseteq W^{\perp}$ para todo $A \in \mathcal{G}^R$.*

Demonstração. Tome $Q \in G(R)$, $w, v \in W$ e $x, y \in V$ quaisquer. Assim W é flat se, e somente se, $Q_{w,v} = 0$. Mas,

$$Q_{w,v} = 0 \iff \langle Q_{w,v}x, y \rangle = 0 \overset{(3.7)}{\iff} \langle Q_{x,y}w, v \rangle = 0 \iff Q_{x,y} = 0 \textbf{ ou } Q_{x,y}w \perp v.$$

É claro que, como $Q \in G(R)$ foi tomado arbitrariamente, então $Q_{x,y}$ não tem porquê ser zero para $x, y \in V$ arbitrários, donde $Q_{x,y}w \perp v$. Agora, por definição de $\mathcal{G}^R$ (que é o espaço gerado por todos os $Q_{x,y}w$, com $Q \in G(R)$), segue que $\mathcal{G}^R(W) \subsetneqq W^\perp \therefore A(W) \subsetneqq W^\perp \; \forall A \in \mathcal{G}^R$. □

Se W é um subespaço vetorial de dimensão 1 de V, então W é flat. De fato, dados $w, v \in W$, $x, y \in V$ e $Q \in G(R)$, temos que $v = \lambda w, \lambda \in \mathbb{R}$ (pois dim = 1) e

$$\langle Q_{w,v}x, y\rangle = \langle Q_{w,\lambda w}x, y\rangle = \langle Q_{x,y}w, \lambda w\rangle = \langle \lambda Q_{x,y}w, w\rangle = \langle Q_{w,w}x, y\rangle = 0,$$

pois $Q_{w,w} = -Q_{w,w} = 0$. Como $x, y \in V$ foram arbitrários, temos que para qualquer $Q \in G(R), w, v \in W$, $Q_{w,v} = 0 \therefore W$ é flat.

Visto isso, podemos dizer que um subespaço de dim = 1 é trivialmente um subespaço flat. Neste caso, a seguinte definição parece razoável:

3.2.3 Definição. *Seja $W \subsetneqq V$ um subespaço flat. Diremos que W é **não-trivial** se* dim ≥ 2.

Apesar de já definido anteriormente, por um motivo puramente didático, vale lembrarmos que dada uma ação de G sobre M, onde G é grupo de Lie e M é variedade suave, definimos a **órbita de p**, para qualquer $p \in M$, sob a ação de G em M como o conjunto $\{g.p; g \in G\}$. E dizemos que essa ação é **transitiva** se para quaisquer dois pontos $p, q \in M$, $\exists g \in G$ tal que $g.p = q$, ou equivalentemente se a órbita de qualquer ponto é toda a variedade M.

Relembrada esta definição, vamos ao resultado principal desta seção.

3.2.4 Teorema. *Seja $S = [V, R, G]$ um sistema de holonomia e defina G^R como na proposição* (3.1.18). *Então G^R é transitivo sobre a esfera unitária, S^{n-1}, em V, se e somente se, não existem subespaços flat não-triviais de V.*

Demonstração. Pela proposição (3.1.18), G^R é compacto. Daí, sem perda de generalidade, vamos considerar G^R como um grupo compacto de transformações C^∞ de S^{n-1} (pois na verdade, um elemento de $G^R \subset O(n)$ é uma rotação, ou seja, uma transformação C^∞ de S^{n-1}). Se $p \in S^{n-1}$, denotemos por S^{n-1}_p o espaço tangente à S^{n-1} em p. Similarmente, se $h \in G^R$ denotaremos por G^R_h o espaço tangente à G^R em h. Denote por L_h a translação à esquerda por h em G^R.

Para $p \in S^{n-1}$, defina $\varphi_p : G^R \to S^{n-1}$ por,

$$\varphi_p(g) = g(p)$$

e note que $\varphi_p = h \circ \varphi_p \circ L_{h^{-1}}$, pois $h \circ \varphi_p \circ L_{h^{-1}}(g) = h \circ \varphi_p(h^{-1}g) = h \circ (h^{-1}g(p)) \overset{h^{-1}g(p) \in S^{n-1}}{=} g(p) = \varphi(g)\ \forall g \in G^R \therefore \varphi_p = h \circ \varphi_p \circ L_{h^{-1}}$.

Vamos supor agora que G^R é transitivo sobre S^{n-1}.

Afirmação*: $d\varphi_p$ tem posto máximo para cada $h \in G^R$.

Cuidado! $d\varphi_p$ é a diferencial da função φ_p, que afirmamos ter posto máximo para cada $h \in G^R$, i.e., que $(d\varphi_p)_h$ (ou $d\varphi_p(h)$) tem posto máximo, na notação usual. Não confundir com a diferencial de uma certa função φ calculada num ponto p.

Demonstração. (de *): De fato, devemos observar inicialmente que $\varphi_p : G^R \to S^{n-1}; \varphi_p(g) = g(p)$ é uma aplicação diferenciável pela identificação que comentamos no início da demonstração dos elementos de G^R com os de S^{n-1}. E como já provamos que $\varphi_p = h \circ \varphi_p \circ L_{h^{-1}}$, temos que

$$d\varphi_p(G^R_h) = dh \circ d\varphi_p \circ dL_{h^{-1}}(G^R_h) = dh \circ d\varphi_p(G^R_e) \tag{3.14}$$

Assim, se $\exists h_0 \in G^R$ tal que $d\varphi_p$ não é de posto máximo em h_0, então $d\varphi_p$ não é de posto máximo em $e \in G^R$, donde não será de posto máximo em nenhum $h \in G^R$. Mas isto é uma contradição com o fato de assumirmos que G^R é transitivo sobre S^{n-1}, pois sob esta condição, φ_p aplica G^R sobrejetivamente em S^{n-1}. Assim, podemos assumir $d\varphi_p$ com posto máximo em todos os pontos e em particular na identidade. Mais que isso, como nossa escolha de $p \in S^{n-1}$ foi arbitrária a conclusão serve para todo $p \in S^{n-1}$. $\square$ (Afirm *)

Agora, a álgebra de Lie $\mathcal{G}^R$ de G^R pode ser identificada com G^R_e, e S^{n-1}_p pode ser identificado com $p^\perp$ (i.e., com o hiperplano de V ortogonal à p). Sob estas identificações e o fato de φ_p ser uma translação à esquerda definida numa álgebra de Lie, temos que

$$d\varphi_p(A) = A(p) \tag{3.15}$$

O fato de que $d\varphi_p(G_e^R) = S_p^{n-1}$ implica que $\mathcal{G}^R = p^\perp$. Mas lembremos que no lema (3.2.2) provamos que um subespaço $W \subseteq V$ é flat se, e somente se, $A(W) \subseteqq W^\perp$ para todo $A \in \mathcal{G}^R$. Então supondo, por absurdo, que $p \in W$ (flat não-trivial) teríamos que $A(W) \supseteqq A(p) = p^\perp \supseteqq W^\perp \therefore W$ não é flat pelo lema (3.2.2)

Por outro lado, suponha que G^R não é transitivo sobre S^{n-1}. Então afirmamos que $d\varphi_p$ **nunca** é de posto máximo. Com efeito, suponha que $d\varphi_p$ seja de posto máximo para algum ponto, então por (3.14), $d\varphi_p$ tem posto máximo para cada $g \in G^R$, donde segue que o posto é constante. Pelo teorema do posto temos que $\varphi_p(G^R)$ é um conjunto aberto em S^{n-1}. Além disso, como G^R é compacto, $\varphi_{p(G^R)}$ é fechado. Mas S^{n-1} é conexo e logo $\varphi_p(G^R) = S^{n-1}$. Em outras palavra, G^R é transitivo sobre S^{n-1}, o que contradiz nossa hipótese $\therefore$ $d\varphi_p$ **nunca** tem posto máximo.

Do fato de $d\varphi_p(A) = A(p) \in \mathcal{G}^R(p)$ e $d\varphi_p$ nunca ter posto máximo, segue que existe $w \in V$ $(w \in [A(p)]^\perp)$ tal que

$$\langle w, p \rangle = 0 \text{ e } w \in [\mathcal{G}^R(p)]^\perp$$

Finalmente, pelo lema (3.2.2) vemos que o plano gerado por w e p é flat. $\square$(Teor (3.2.4))

3.3 Subespaços Totalmente Geodésicos e Subespaços Simétricos

Nesta seção vamos introduzir as ideias de Subespaços Totalmente Geodésicos e Subespaços Simétricos, que são definições fundamentais para a demonstração do teorema (3.3.3), que será enunciado mais adiante na seção.

Como diz o título deste capítulo, vamos dar aqui uma demonstração para o teorema de Berger. Mas, de alguma maneira, podemos dizer que o teorema (3.3.3) é o "resultado principal"do capítulo. E por quê podemos dizer isto?

Comentamos anteriormente, quando construímos a álgebra $J = \mathcal{G}^R \oplus V$, que o resultado obtido por Cartan em [5] garante que à tal álgebra corresponde uma variedade Riemanniana simétrica e simplesmente conexa, M, cujo tensor de curvatura é R e sua álgebra de holonomia é $\mathcal{G}^R$, i.e., o seu grupo de holonomia é G^R. O teorema (3.3.3) afirma então que se G^R não agir transitivamente sobre S^{n-1}, obrigatoriamente S será simétrico. Em outras palavras, se $S = [V, R, G]$ for não-simétrico e irredutível, então G^R age transitivamente sobre S^{n-1}. Porém, devido ao resultado de Montgomery and Samelson em [12], a lista dos grupos de Lie compactos ($\subseteq SO(n)$), conexos, agindo transitivamente e efetivamente sobre a esfera S^{n-1} é a mesma lista obtida por Berger para os grupos de holonomia de uma variedade Riemanniana simplesmente conexa, acrescida apenas de dois outros grupos, o $Sp(m)U(1)$ agindo sobre $S^{4m-1}, m > 1$, e o grupo $Spin(9)$ agindo sobre S^{15}. Assim, se provarmos que estes dois últimos grupos (o que será feito mais tarde!) não podem ocorrer como grupos de Holonomia, o teorema (3.3.3) nos dá uma demonstração para o teorema de Berger.

Visto isso, podemos supor (para desgosto dos matemáticos, este é um tipo de afirmação que não pode ser comprovada) que na verdade esta semelhança entre as listas de grupos obtidas por Berger, para os grupos de holonomia, e por Montgomery and Samelson, para os grupos que agem transitivamente sobre S^{n-1}, motivou Simons a fazer este trabalho e assim chegar a uma demonstração para o teorema (3.3.3).

Em todo este parágrafo, $S = [V, R, G]$ denotará um sistema de holonomia.

3.3.1 Definição. *Seja $M \subsetneqq V$ um subespaço. M é dito ser **totalmente geodésico** se $Q_{l,m}n \in M$ $\forall Q \in G(R)$ e $l,m,n \in M$. Para tal M, temos que $Q|_M$ é um tensor de curvatura sobre M para qualquer $Q \in G(R)$.*

3.3.2 Teorema. *Seja M um subespaço totalmente geodésico. Defina $\mathcal{J} = \{A \in \mathcal{G}; A(Q)|_M = 0$ para qualquer $Q \in G(R)\}$. Então $\mathcal{J}$ é um ideal de $\mathcal{G}$. Além disso,*

(i) $\mathcal{G}_R \subsetneqq \mathcal{J}$;

(ii) $Q_{m,x} \in \mathcal{J}$, *onde $m \in M$, $x \in M^{\perp}$ e $Q \in G(R)$.*

obs: $\mathcal{J} = \{A \in \mathcal{G}; A(Q)|_M = 0 \;\; \forall Q \in G(R)\}$ pode ser interpretado da seguinte maneira:

Tome $A \in \mathcal{J}$ e $x, y \in M$ quaisquer, logo

$$A(Q)_{x,y} = 0 \iff -Q_{A(x),y} - Q_{x,A(y)} - [Q_{x,y}, A] = 0 \iff$$
$$Q_{A(x),y} + Q_{x,A(y)} = [A, Q_{x,y}]$$

Assim, $\mathcal{J}$ é o conjunto dos elementos $A \in \mathcal{G}$ tais que: $Q_{A(x),y} + Q_{x,A(y)} = [A, Q_{x,y}]$.

Demonstração. O mapa $Q \to Q|_M$ de $G(R)$ definido injetivamente sobre tensores de curvatura de M é obviamente um homomorfismo linear. Denote por K o seu kernel, i.e., $K = \{Q \in G(R); Q_{l,m}n = 0$ para quaisquer $l, m, n \in M\}$. Daí

Afirmação: K é um subespaço de $G(R)$ invariante sob a representação de $\mathcal{G}$ sobre $G(R)$.

De fato, seja $A \in \mathcal{G}$, $Q \in K$ e vamos mostrar que $A(Q) \in K$. Para isso, é suficiente provar que:

$$\langle A(Q)_{l,m}n, p\rangle = 0 \qquad \forall l, m, n, p \in M,$$

pois, como M é totalmente geodésico por hipótese, $A(Q)_{l,m}n \in M$. Ora,

$$\langle A(Q)_{l,m}n, p\rangle \overset{(3.2)}{=} -\left\langle Q_{A(l),m}n, p\right\rangle - \left\langle Q_{l,A(m)n,p}\right\rangle - \langle [Q_{l,m}, A]n, p\rangle =$$

$$-\left\langle Q_{A(l),m}n, p\right\rangle - \left\langle Q_{l,A(m)}n, p\right\rangle - (\langle Q_{l,m}A(n), p\rangle - \langle A \circ Q_{l,m}n, p\rangle) =$$

$$-\left\langle Q_{A(l),m}n, p\right\rangle - \left\langle Q_{l,A(m)}n, p\right\rangle - \langle Q_{l,m}A(n), p\rangle - \langle Q_{l,m}n, A(p)\rangle \overset{(3.4),(3.6),(3.7)}{=}$$

$$\langle Q_{n,p}m, A(l)\rangle - \langle Q_{n,p}l, A(m)\rangle + \langle Q_{l,m}p, A(n)\rangle - \langle Q_{l,m}n, A(p)\rangle = 0,$$

pois cada um dos termos do lado esquerdo da última equação é zero e isso segue do fato de $Q \in K$ e $m, n, l, p \in M$ $\square$(Afirmação).

Agora, pela nossa definição de K, $A \in \mathcal{J}$ se, e somente se, $A(G(R)) \subseteqq K$ (por conta da afirmação provada acima). Suponhamos então A com essa propriedade, um B arbitrário em $\mathcal{G}$, e $Q \in G(R)$. Daí,

$$[B, A](Q) = B(A(Q)) - A(B(Q)) \in K.$$

Isso segue do fato de $B(A(Q)) \in K$ pela afirmação acima e por $B(Q) \in G(R)$ (por (b)) e $A(G(R)) \subseteqq K$, o que implica que $A(B(Q)) \in K$. Assim temos que $\mathcal{J}$ é um ideal de $\mathcal{G}$ (lembre que nossa operação é $[.,.]$).

Para a segunda parte da demonstração, começamos observando que

$$\text{(i)} \qquad \mathcal{G}_R \subseteqq \mathcal{J}$$

é trivial pela proposição (3.1.11).

Para provar (ii) vamos primeiro provar que se $A \in \mathcal{G}$ tem a propriedade de que $A(M) \subseteqq M^{\perp}$, então $A \in \mathcal{J}$.

Ora, sob estas hipóteses

$$\langle A(Q)_{l,m}n, p\rangle = \langle Q_{n,p}m, A(l)\rangle - \langle Q_{n,p}l, A(m)\rangle + \langle Q_{l,m}p, A(n)\rangle - \langle Q_{l,m}n, A(p)\rangle = 0,$$

pois $A(M) \subseteqq M^{\perp}$ e M é totalmente geodésico.

Agora, se $m \in M$ e $x \in M^{\perp}$, temos que, para $l, n \in M$,

$$\langle Q_{m,x}l, n\rangle = \langle Q_{l,n}m, x\rangle = 0$$

donde $Q_{m,x}(M) \subseteqq M^{\perp}$ e assim $Q_{m,x} \in \mathcal{J}$. $\square$(Teor(3.3.2))

E como tínhamos comentado no início desta seção, vamos enunciar o teorema (3.3.3), que como dissemos, é o "resultado principal"do capítulo.

3.3.3 Teorema. *Seja $S = [V, R, G]$ um sistema de holonomia irredutível. Se G^R **não é transitivo** sobre S^{n-1}, então S é simétrico.*

A demonstração deste resultado é bem complicada e requer muitas contas, logo de agora em diante na seção, tudo o que fizermos, será diretamente relacionado à prova deste resultado.

3.3.1 A demonstração do Teorema (3.3.3)

Em toda esta subseção, vamos assumir que S é um sistema de holonomia **irredutível** com G^R não-transitivo.

Seja W um subespaço flat não-trivial de V, cuja existência é garantida pelo teorema (3.2.4). Para cada $Q \in G(R)$, definimos T_Q como uma aplicação bilinear de $W \times W$ definida injetivamente sobre transformações lineares simétricas de V sobre V (também definidas injetivamente):

$$T_Q(v, w)(x) = Q_{v,x}w \qquad \text{para } v, w \in W \text{ e } x \in V.$$

Note que T_Q está bem definida e:

$$T_Q(v_1 + v_2, w)(x) = Q_{v_1+v_2,x}(w) = Q_{v_1,x}w + Q_{v_2,x}w = T_Q(v_1, w)(x) + T_Q(v_2, w)(x),$$

e

$$T_Q(v, w_1 + w_2)(x) = Q_{v,x}(w_1 + w_2) = Q_{v,x}w_1 + Q_{v,x}w_2 = T_Q(v, w_1)(x) + T_Q(v, w_2)(x).$$

donde segue que T_Q é bilinear. Além disso, $T_Q(v, w)(x) = Q_{v,x}w \overset{(3.5)}{=} -Q_{w,v}x - Q_{x,w}v = Q_{w,x}v$, pois W é flat ($\therefore Q_{w,v}x = 0 \ \forall x$) e assim

$$T_Q(v, w) = T_Q(w, v) \tag{3.16}$$

Para mostrar que $T_Q(v, w)$ é simétrico, precisamos mostrar que

$$\langle T_Q(v, w)(x), y\rangle = \langle T_Q(v, w)(y), x\rangle \tag{3.17}$$

Mas,

$$\langle T_Q(v, w)(x), y\rangle = \langle Q_{v,x}w, y\rangle \overset{(3.7)}{=} \langle Q_{w,y}v, x\rangle =$$

$$\langle T_Q(w,v)(y),x\rangle \overset{(3.16)}{=} \langle T_Q(v,w)(y),x\rangle$$

3.3.4 Lema. *Para $v,w,s,t \in W$, temos* $[T_Q(v,w),T_Q(s,t)] = 0$

Demonstração. Seja $x \in V$ arbitrário. Daí,

$$T_Q(v,w)\circ T_Q(s,t)(x) = T_Q(v,w)\big(Q_{s,x}t\big) = Q_{v,Q_{s,x}t}w$$

Por (3.13) $\big(Q_{x,A(y)} + Q_{A(x),y} = 0,\ \text{pois W é flat}\big)$,

$$Q_{v,Q_{s,x}t}w = -Q_{Q_{s,x}v,t}w \overset{(3.4)}{=} Q_{t,Q_{s,x}v}w = T_Q(t,w)\big(Q_{s,x}v\big) = T_Q(t,w)\circ T_Q(s,v)(x).$$

Assim

$$T_Q(v,w)\circ T_Q(s,t)(x) = T_Q(t,w)\circ T_Q(s,v)(x) \quad \forall v,w,s,t \in W \qquad (*)$$

Agora por (3.16),

$$T_Q(t,w)\circ T_Q(s,v)(x) = T_Q(w,t)\circ T_Q(v,s)(x)$$

e por (*),

$$T_Q(w,t)\circ T_Q(v,s)(x) = T_Q(s,t)\circ T_Q(v,w)(x)$$

Combinando os dois resultados, segue que

$$T_Q(v,w)\circ T_Q(s,t)(x) = T_Q(s,t)\circ T_Q(v,w)(x) \quad \forall x \in V.$$

Donde, por definição, $[T_Q(s,t)\circ T_Q(v,w)(x)]$ $\forall v,w,s,t \in W$ $\square$ Lema(3.3.4)

Temos assim que para um $Q \in G(R)$ **fixado**, $\{T_Q(v,w)\}$ é uma família comutativa de transformações simétricas de V. Deste modo, elas podem ser simultaneamente diagonalizadas com auto-vetores ortonormais, X_k; i.e., $\{X_k\}$ é uma base ortonormal de V tal que

$$T_{v,w}\big(X_k\big) = \mathbf{k}(v,w)X_k,$$

onde $\mathbf{k}$ é uma forma bilinear simétrica sobre W.

Vários destes auto-vetores terão auto-valores triviais (obs: por auto-valores, nos referimos às formas bilineares $\mathbf{k}$). Em particular, W é gerado por tais auto-vetores para qualquer Q.

De fato, $T_Q(v,w)\big(W\big) = 0$, pois se $x \in W$ arbitrário e W é flat temos que $Q_{v,x} = 0$, donde $T_Q(v,w)(x) = Q_{v,x}w = 0$. Logo os X_k que geram W, estão no núcleo de $T_Q(v,w)$ e assim $T_Q(v,w)\big(X_k\big) = 0 = \mathbf{k}(v,w)X_k \therefore \mathbf{k}(v,w)$ é auto-valor trivial.

É importante ressaltar que acima diagonalizamos a família $\big\{T_Q(v,w)\big\}$ **simultaneamente**.

Agora vamos fixar Q por um momento e estudar algumas consequências interessantes da nossa definição da família $\big\{T_Q(v,w)\big\}$. Suponha X_k um auto-vetor não-trivial de $T_Q(v,w)$. Assim $\mathbf{k}$ é uma forma bilinear simétrica em W diferente de zero. Então existe um $x \in W$ tq $\mathbf{k}(x,x) \neq 0$ (tome uma base de W ortonormal com respeito à $\mathbf{k}$, daí se $\mathbf{k}$ não é constante igual a zero, então esse $x \in W$ existe). Assim podemos escrever,

$$X_k = \frac{1}{\mathbf{k}(x,x)} Q_{x,X_k} x \tag{3.18}$$

pois $T_Q(x,x)\big(X_k\big) = Q_{x,X_k}x = \mathbf{k}(x,x)X_k$.

Defina $U_k \subset W$ por,

$$U_k = \{u \in W; \mathbf{k}(u,x) = 0\}.$$

Como $0 \in U_k \subset W$, então U_k é um subespaço não-vazio de W de co-dimensão 1 (de fato, é possível definir base $\{x, b_2, b_3, ..., b_{\dim W}\}$ ortonormal com respeito à $\mathbf{k}$, donde $\mathbf{k}(b_i,x) = 0 \ \ \forall i = 2, ..., \dim W \to \langle b_i \rangle_{i=2}^{\dim W} = U_k$).

3.3.5 Lema. *Para qualquer $P \in G(R)$ e $u \in U_k$,*

$$P_{u,X_k} = 0$$

Demonstração. Pela equação (3.18), temos que

$$P_{u,X_k} = \frac{1}{\mathbf{k}(x,x)} P_{u,Q_{x,X_k}x}$$

Por (3.13) temos,

$$\frac{1}{\mathbf{k}(x,x)}P_{u,Q_{x,X_k}}x \overset{(3.13)}{=} \frac{1}{\mathbf{k}(x,x)}P_{x,Q_{x,X_k}}u = \frac{1}{\mathbf{k}(x,x)}P_{x,Q_{x,\mathbf{k}(x,u)X_k}}$$

Mas $\frac{1}{\mathbf{k}(x,u)}P_{x,\mathbf{k}(x,u)X_k} = 0$ por definição de U_k, donde

$$P_{u,X_k} = 0 \text{ para qualquer } P \in G(R) \text{ e } u \in U_k$$

$\square$ Lema(3.3.5)

Segue do Lema (3.3.5) que, em particular, $Q_{u,X_k} = 0$, e então para qualquer $w \in W$, $Q_{u,X_k}w = 0 \therefore \mathbf{k}(w,u) = 0$ para quaisquer $w \in W$ e $u \in U_k$. Segue daí que U_k é o kernel de $\mathbf{k}$, e sua definição independe de x.

Defina $M_k := \{m \in V; P_{u,m} = 0, \text{ para todo } u \in U_k \text{ e todo } P \in G(R)\}$ e note que $W \subseteq M_k$, e $X_k \in M_k$.

3.3.6 Lema. *$L_{m,n}r \in M_k$ para qualquer $L \in G(R)$ e $m,n,r \in M_k$, i.e., M_k é totalmente geodésico.*

Demonstração. Pela definição de M_k, temos que provar que para qualquer $P \in G(R)$ e $u \in U_k$,

$$P_{u,L_{m,n}r} = 0, \text{ com } L \in G(R),\ m,n,r \in M_k.$$

Pela equação (3.2), temos que para qualquer $u \in U_k$, $m \in M_k$, $A \in \mathcal{G}$:

$$0 = A(P)_{u,m} \overset{(3.2)}{=} -P_{A(u),m} - P_{u,A(m)} - [P_{u,m}, A] = 0 \Longrightarrow$$

$$P_{A(u),m} + P_{u,A(m)} = 0 \tag{3.19}$$

Assim,

$$P_{u,L_{m,n}r} = -P_{L_{m,n}u,r}$$

mas pela definição de M_k segue que

$$L_{m,n}u + L_{u,m}n + L_{n,u}m \overset{(3.5)}{=} 0$$

donde $L_{m,n}u = 0$, pois $L_{u,m}n$ e $L_{n,u}m$ são iguais a zero pela definição de M_k e finalmente provamos que

$$P_{u,L_{m,n}r} = 0$$

$\Box$Lema(3.3.6)

Então, para cada $Q \in G(R)$ fixo, a diagonalização simultanea de $T_Q(v,w)$ dá origem aos $\{U_k\}$, subespaços de W de codimensão 1, correspondendo aos auto-vetores não-triviais (quando eles existem). Esses U_k, por sua vez, geram subespaços $M_k \subset V$ **totalmente geodésicos**, cada um dos quais contém W.

3.3.7 Lema. *Seja X_k um dos auto-vetores não-triviais de $T_Q(v,w)$ e seja M_l um dos subespaços totalmente geodésicos determinados por $T_P(v,w)$ (P potencialmente diferente de Q). Então $X_k \in M_l$ ou $X_k \in M_l^{\perp}$.*

Demonstração. Suponhamos que $X_k \notin M_l$ e vamos provar que, nesse caso, $X_k \in M_l^{\perp}$. Para isso, vamos tomar $m \in M_l$ arbitrário e mostrar que $\langle X_k, m\rangle = 0$.

Ora, pelo lema (3.3.5) e o fato de $X_k \in M_k$, temos que $U_k \neq U_l$, caso contrário teríamos $U_k = U_l \Longrightarrow P_{u,X_k} = 0\ \forall u \in U_l \Longrightarrow X_k \in M_l$. Assim, existe um $w \in U_l$ tal que $w \notin U_k$.

Agora, como $\mathbf{k} \neq 0$, U_k é o kernel de $\mathbf{k}$ e a codimensão de U_k em W é 1, temos que $\mathbf{k}(w,w) \neq 0$. Daí podemos escrever

$$X_k = \frac{1}{\mathbf{k}(w,w)} Q_{w,X_k} w.$$

Seja $m \in M_l$ arbitrário. Então,

$$\langle X_k, m\rangle = \frac{1}{\mathbf{k}(w,w)} \langle Q_{w,X_k} w, m\rangle \overset{(3.7)}{=} \frac{1}{\mathbf{k}(w,w)} \langle Q_{w,m} w, X_k\rangle$$

Mas como $w \in U_l$ e $m \in M_l$, por definição de M_l, $Q_{w,m}w = 0$. Assim $\langle X_k, m\rangle = 0 \therefore X_k \in M_l^{\perp}$ $\Box$Lema(3.3.7)

Consideremos agora um subespaço flat W qualquer. Seja

$$Z(W) = \{z \in V;\ \ T_Q(w,v)(z) = Q_{w,z}v = 0\ \ \forall v,w \in W \text{ e } \forall Q \in G(R)\}.$$

É importante notar que $Z(W)$ é a interseção de todos os auto-espaços triviais (no sentido de serem auto-espaços de auto-valores triviais) de todos os $T_Q(v,w)$, i.e., $Z(W) =$

$\bigcap\limits_{T_Q(v,w)} \langle X_{k_1}, ..., X_{k_j} \rangle$, onde j é a cardinalidade do conjunto dos autovetores triviais de $T_Q(v, w)$. Assim se definimos X como o espaço gerado por todos os auto-vetores não-triviais, temos

$$V = Z(W) \perp X \tag{3.20}$$

É claro que $W \subseteq Z(W)$, pois dado $\tilde{\mathrm{w}} \in W$, então

$$T_Q(w, v)(\tilde{\mathrm{w}}) = Q_{w,\tilde{\mathrm{w}}}(v) = 0, \text{ pois } W \text{ é flat.}$$

Ora, então para cada subespaço $W \subset V$ flat, estamos definindo esse conjunto $Z(W)$ que satisfaz (3.20), i.e., $V = Z(W) \perp X$. Mas uma pergunta natural é: Existem outras propriedades interessantes que $Z(W)$ satisfaz?

3.3.8 Lema. *O conjunto $Z(W)$, definido como anteriormente, é totalmente geodésico.*

Demonstração. Notemos inicialmente que

$$A(Q)_{w,z} = -Q_{A(w),z} - Q_{w,A(z)} - [Q_{w,z}, A]$$

Daí, se $w, v \in W$, $z \in Z(W)$, $Q \in G(R)$ e $A \in \mathcal{G}$ temos

$$A(Q)_{w,z}(v) = 0 = -Q_{A(w),z}(v) - Q_{w,A(z)}(v) - Q_{w,z}A(v) + A(Q_{w,z}v)$$

mas $Q_{w,z}v = 0$ pela definição de $Z(W)$, donde

$$Q_{A(w),z} + Q_{w,A(z)} + Q_{w,z}A(v) = 0 \tag{*}$$

Para provarmos que $Z(W)$ é totalmente geodésico, temos que mostrar que para quaisquer $x, y, z \in Z(W)$ e $P \in G(R)$,

$$P_{x,y}z \in Z(W), \text{ i.e., temos que provar que}$$

$$Q_{v,P_{x,y}z}w = 0 \quad \forall v, w \in W \text{ e } \forall Q \in G(R).$$

Primeiramente consideraremos o caso onde $x = u \in W$. Então por (*)

$$Q_{v,P_{u,y}z}w \overset{(*)}{=} -Q_{P_{u,y}v,z}w - Q_{v,z} \circ P_{u,y}w = 0,$$

pela definição de $Z(W)$.

Assim $P_{u,y}z \in Z(W)$ quando $u \in W$ e $y, z \in Z(W)$. Mas pela identidade de Jacobi, temos ainda que

$$P_{y,z}u \in Z(W) \tag{**}$$

No caso geral,

$$Q_{v,P_{x,y}z}w = -Q_{P_{x,y}v,z}w - Q_{v,z} \circ P_{x,y}w \in Z(W)$$

por (**) e pelo caso especial provado acima. Mas se $t \in Z(W)$, então $\left\langle Q_{v,P_{x,y}z}w, t \right\rangle \overset{(3.7)}{=} \langle Q_{w,t}v, P_{x,y}z \rangle = 0$. Daí como t foi arbitrário, temos que $Q_{v,P_{x,y}z}w = 0 \therefore Z(W)$ é totalmente geodésico. $\square$Lema(3.3.8)

Como observamos logo após enunciar o Teorema (3.3.3), esta subseção seria destinada exclusivamente à demonstração deste teorema. Mas até agora, fizemos algumas definições e provamos lemas técnicos, com propriedades importantes e úteis das definições apresentadas. Agora vamos, de fato, à demonstração do teorema (3.3.3) e, sendo assim, é interessante reenunciá-lo.

3.3.3 Teorema: Seja $S = [V, R, G]$ um sistema de holonomia irredutível. Se G^R não age transitivamente sobre a esfera S^{n-1}, então S é simétrico.

Demonstração. Vamos fazer uma indução sobre a dimensão de V.

Se dim $V = 1$, então $G = \{\mathtt{Id}\}$. Logo $\forall g \in G$ ($g =$Id) temos $g(R) = R$.

No caso dim $V = 2$, temos que se G^R é não transitivo, o Teorema (3.2.4) nos diz que existe um subespaço flat não trivial W (i.e., dim $W \geqq 2$). Logo W é subespaço flat de V de dimensão **igual** a 2 $\therefore V = W \therefore V$ é flat, ou seja, $Q_{x,y} = 0\ \forall x, y \in V$ e $\forall Q \in G(R)$. Em particular, $R_{x,y} = 0\ \forall x, y \in V$. Finalmente, tome $A \in \mathcal{G}$ qualquer e note que $A(R)_{x,y} = 0$ $\forall x, y \in V$, pelo que provamos anteriormente $\therefore A(R) = 0\ \forall A \in \mathcal{G} \therefore$ S é simétrico.

Agora vamos assumir que o teorema seja válido para $\dim V \leq n$.

Seja $S = [V, R, G]$ um sistema de holonomia irredutível com $\dim V = n + 1$. Por hipótese, G^R não é transitivo sobre S^{n-1}, donde o teorema (3.2.4) nos diz que existe um subespaço flat não trivial de V. Seja W um tal subespaço e vamos pedir ainda que W seja maximal, i.e., com a maior dimensão possível (de modo que ainda seja flat).

Afirmação 1: Podemos escolher W, satisfazendo a condição de maximalidade, tal que $Z(W) \neq V$.

Demonstração. Primeiramente, fixemos $v \in V$ arbitrariamente e notemos que v pertence a algum subespaço flat não-trivial maximal (é só fixar W maximal qualquer e multiplicar por um $g \in G$ adequado).

Suponhamos que todos os subespaços W como acima sejam tais que $Z(W) = V$. Sem perda de generalidade, suponha que um verto $v \in V$ é tal que $v \in W$. Daí tome $x \in V = Z(W)$ arbitrário e note que $R_{v,x}v = 0$, pela definição de $Z(W)$. Assim teríamos que $\langle R_{v,x}v, y\rangle = 0$ $\forall v \in W$, $\forall x, y \in V = Z(W)$. Mas como $v \in V$ foi fixado arbitrariamente e é tal que existe W flat com $v \in W$, então temos que esse tensor de curvatura R é identicamente nulo, donde teríamos que S seria um espaço simétrico, o que contradiz a hipótese. $\square$(Afirmação 1)

Nesse caso, podemos fixar W como sendo um subespaço flat maximal de V tal que $Z(W) \neq V$. Seja H' o subgrupo de G consistindo dos elementos que movem $Z(W)$ nele mesmo, i.e., $H' = \{g \in G; g(Z(W)) \subseteqq Z(W)\}$.

Afirmação 2: H' é subgrupo compacto de G.

Demonstração. Primeiro, $e \in H'$ pois $e(Z(W)) = Z(W)$ e além disso, se $g(Z(W)) \subseteqq Z(W) \Longrightarrow g^{-1}(Z(W)) \subseteqq Z(W)$. Com efeito, sabemos que $V = Z(W) \perp X$. Se $g \in G \subset O(n)$ é tal que $g(Z(W)) \subseteqq Z(W)$, então g é uma rotação apenas nos eixos da sub-base de V que gera $Z(W)$. Daí $g^{-1} \in G \subset O(n)$ também será uma rotação nos mesmo eixos, de modo que $g^{-1}(Z(W)) \subseteqq Z(W)$.

Temos assim que, dados $h, \tilde{h} \in H'$, então $\tilde{h}^{-1} \in H'$ e $h \circ \tilde{h}^{-1}(Z(W)) \subseteqq h(Z(W)) \subseteqq Z(W) \therefore h \circ \tilde{h}^{-1} \in H'$. Donde segue que H' é subgrupo de G.

Por outro lado, lembremos que $Z(W) = \{z \in V; T_Q(v, w)(z) = 0 \;\; \forall v, w \in W, \forall Q \in$

$G(R)\}$, donde podemos reescrever H' como:

$$H' = \{g \in G; T_Q(v,w)(g(Z)) = 0 \quad Z(W),\ v, w \in W \text{ e } \forall Q \in G(R)\}$$

e isto é obviamente uma relação fechada $\therefore$ H' é fechado.

Logo H' é subgrupo fechado do grupo compacto G $\therefore$ H' é subgrupo compacto de G; donde segue que H' é subgrupo de Lie compacto de G. □(Afirmação 2)

Pelo lema (3.3.8), temos que $Z(W)$ é totalmente geodésico, i.e., $Q_{y,z}x \in Z(W)$ $\forall x, y, z \in Z(W)$ e $\forall Q \in G(R)$, em outras palavras, $Q_{y,z}(Z(W)) \subseteqq Z(W)$. Mas note que os elementos da álgebra de Lie de H' são exatamente os elementos $A \in \mathcal{G}$ tais que $A(Z(W)) \subseteqq Z(W)$. Ora, por (c) (da Afirmação 4.1.8), temos que $Q_{a,b} \in \mathcal{G}$ $\forall a, b \in V$, desde que G seja grupo de holonomia. Logo $Q_{y,z}$ é um elemento da álgebra de Lie de H'.

Seja $H = H'|_{Z(W)}$, e denotemos por $\mathcal{H}$ a álgebra de Lie de H.

Afirmação 3: Para qualquer $Q \in G(R)$, $Z_Q = [Z(W), Q|_{Z(W)}, H]$ é um sistema de holonomia.

Demonstração. Com efeito, $Z(W)$ é um espaço vetorial, $Q|_{Z(W)}$ é tensor de curvatura (pois $Z(W)$ é totalmente geodésico) e H é grupo de holonomia, pois dados $v, w \in Z(W)$, temos que $Q_{v,w} \in \mathcal{H}$ pela definição de H □(Afirmação 3)

3.3.9 Lema. *Sejam $w \in W$ e $y, z \in Z(W)$. Então para qualquer $Q \in G(R)$, temos que* $Q_{w,y}z = 0$.

Demonstração. Primeiramente denotemos $Q|_{Z(W)}$ por $\hat{Q}$, para simplificar a notação. Neste caso, devemos mostrar que $\hat{Q}_{w,y} = 0$ $\forall w \in W$ e $\forall y \in Z(W)$.

Pela nossa escolha de W, tínhamos que $\dim(Z(W)) < \dim V$. Assim, podemos aplicar a nossa hipótese de indução (i.e., que o toerema (3.3.3) é válido para sistemas de holonomia com dim $\leq n$) à $Z_Q = [Z(W), \hat{Q}, H]$.

Primeiramente suponhamos que Z_Q é irredutível, então temos 2 casos:

Caso 1: Z_Q é simétrico.

Caso 2: H é transitivo sobre a esfera unitária em $Z(W)$.

Caso 1: Como já mencionamos anteriormente, é fato conhecido da teoria de espaços simétricos (ver [9]) que se $\hat{Q}$ é o tensor de curvatura de um espaço simétrico irredutível, então $\hat{Q}_{y,z} = 0$ se, e somente se, $\left\langle \hat{Q}_{y,z}y, z \right\rangle = 0$. Agora como $w \in W$, para qualquer $y \in Z(W)$, $\hat{Q}_{w,y}w = 0$. Assim $\left\langle \hat{Q}_{w,y}w, y \right\rangle = 0$, donde $\hat{Q}_{w,y} = 0$.

Caso 2: Seja $h' \in H' \subsetneqq G$. Então para qualquer $y \in Z(W)$ e $w \in W$, pelo fato de $h'(Q) \in G(R)$, temos

$$h'(Q)_{w,y}w = 0.$$

Se definimos $h = h'|_{Z(W)}$, então é claro que,

$$h(\hat{Q})_{w,y}w = 0$$

Mas como y é um elemento arbitrário de $Z(W)$, por (3.1), segue que

$$\hat{Q}_{h(w),y}h(w) = 0, \text{ para qualquer } y \in Z(W)$$

pois $h(\hat{Q})_{w,y}w = h \circ Q_{h^{-1}(w),h^{-1}(y)} \circ h^{-1}(w) = 0$.

Agora, como estamos assumindo que H é transitivo em $Z(W)$, concluímos que $\hat{Q}_{z,y}z = 0$ para todo $y, z \in Z(W)$, pois existe $h \in H$ tal que $z = h(w)$, para algum $w \in Z(W)$. Daí, $\left\langle \hat{Q}_{z,y}z, y \right\rangle = 0 \ \ \forall y, z \in Z(W) \implies Q = 0$. Então, em particular, $\hat{Q}_{w,y} = 0$ (pois $W \subset Z(W)$).

Agora se Z_Q é sistema de holonomia redutível, pelo corolário da proposição (3.1.18), podemos decompor $Z_Q^{\hat{Q}}$ em p sistemas de holonomia $Z_Q^1, ..., Z_Q^p$, tais que $Z_Q^{\hat{Q}} \cong Z_Q^1 \times ... \times Z_Q^p$, Z_Q^1 é trivial e cada Z_Q^i é irredutível $\forall\, i \geq 2$. Em cada um dos casos, temos que $(\hat{Q}_i)_{w,y} = 0$ para qualquer $y \in Z(W)$, $w \in W$, pelo mesmo argumento anterior onde Z_Q era irredutível. Daí finalmente teremos que $\hat{Q}_{w,y} = 0$ para qualquer $y \in Z(W)$ e $w \in W$ $\square$Lema (3.3.9)

Lembremos da definição dos $M_k = \{m \in V;\ P_{u,m} = 0,\ \forall u \in U_k \text{ e } \forall P \in G(R)\}$ e vamos provar que esses espaços "decompõe" V de uma forma específica (e lembre que o lema (3.3.6) dizia que M_k é totalmente geodésico).

3.3.10 Lema. *V é igual à $\sum_k M_k$, onde* $\mathbf{k}$ *percorre o conjunto dos auto-valores não-triviais de todos os $T_Q(v, w)$, $\forall Q \in G(R)$.*

Demonstração. Suponha que $\exists y \in (\sum_k M_k)^\perp$. É claro que M_k contém todos os autovetores não-triviais X_k (pois $P_{u,X_k} = 0$, Lema (3.3.5)), donde $T_Q(v,w)(y) = 0 \ \forall Q \in G(R)$, $\forall v, w \in W \Longrightarrow y \in Z(W)$.

Fixemos $w \in W$ e $Q \in G(R)$.

Afirmação*: Para um M_k arbitrário, temos que:

$$Q_{w,y}(M_k) \subseteqq M_k \tag{*}$$

Demonstração. (de *) Para isso, é suficiente mostrarmos que $P_{u,Q_{w,y}m} = 0$, para qualquer $u \in U_k, m \in M_k$ e $P \in G(R)$. Por (3.19)

$$P_{u,Q_{w,y}m} + P_{Q_{w,y}u,m} = 0$$

mas como $y \in Z(W)$ e $w, u \in W$, temos que $Q_{w,y}u = 0$, donde $P_{Q_{w,y}u,m} = 0$. Daí segue que $P_{u,Q_{w,y}m} = 0$ □(*)

Afirmação:** Para um M_k arbitrário, temos que:

$$Q_{w,y}(M_k) \subseteqq M_k^\perp \tag{**}$$

Demonstração. (de)** Ora, $w \in W$ e $y \in Z(W)$, assim para quaisquer $l, n \in M_k$, temos

$$\langle Q_{w,y}l, n\rangle \overset{(3.7)}{=} \langle Q_{l,n}w, y\rangle = 0,$$

pois M_k é totalmente geodésico pelo Lema (3.3.6),i.e., $Q_{l,n}w \in M_k$, e $y \in (\sum_k M_k)^\perp$. Daí $Q_{w,y}l \in (M_k)^\perp$ □(Afirm**)

Assim (*) e (**) implicam que $Q_{w,y}(M_k) = 0$. Mas o Lema (3.3.9) prova que $Q_{w,y}(Z(W)) = 0$. Juntamente com o fato de $V = Z(W) \perp X$, $X = \langle X_k\rangle$ e $X_k \in M_k$ para cada $\mathbf{k}$, segue que $Q_{w,y} = 0$. E como isso funciona para todo $Q \in G(R)$, a maximalidade de W nos garante que $y \in W$. Mas isso contradiz a hipótese de $y \in (\sum_k M_k)^\perp$ □(Lema (3.3.10))

3.3.11 Lema. $\sum\limits_k M_k^\perp = W^\perp$, *onde* $\mathbf{k}$ *percorre o conjunto dos auto-valores não-triviais de todos os* $T_Q(v,w)$, $\forall Q \in G(R)$.

Demonstração. Isto é equivalente a provar que $\bigcap M_k = W$. Neste caso, existem duas possibilidades:

1: Existe um único M_k.

2: Existem vários M_k.

Caso 1: Pelo Lema (3.3.10), $V = M_k$. Assim para qualquer $u \in U_k$, $x \in V$ $(= M_k)$ e $Q \in G(R)$, temos $Q_{u,x} = 0$ pela definição do M_k. Defina

$$J = \{v \in V; Q_{v,x} = 0 \text{ para qualquer } x \in V \text{ e qualquer } Q \in G(R)\}$$

e note que J é um subespaço de V invariante por G. Com efeito, seja $g \in G$ qualquer. Por (3.1) temos que

$$0 = g(Q)_{v,x} = g \circ Q_{g^{-1}(v),g^{-1}(x)} \circ g^{-1} = 0 \Longrightarrow Q_{g^{-1}(v),g^{-1}(x)} = 0 \Longrightarrow g^{-1}(v) \in J$$

.

Note também que $U_k \subsetneqq J$, donde $J \neq \emptyset$ e que pela hipótese de irredutibilidade de V temos que $J = V$. Assim, $R = 0$ e então S é simétrico.

Caso 2: Suponha que existam M_k e M_l distintos. Então $U_k \neq U_l$, e como cada um destes é subespaço de co-dimensão 1 em W, $W = U_k + U_l$. Daí se $x \in M_k \cap M_l$, $Q_{w,x} = 0$ $\forall w \in W$ e $\forall Q \in G(R)$, donde $M_k \cap M_l$ é flat. Mas pela maximalidade de W temos que $x \in W$. É óbvio que se existem vários $M_{k_1}, ..., M_{k_p}$, usamos processo indutivo na argumentação acima e completamos o caso 2 e assim o Lema (3.3.11) $\square$(Lema(3.3.11))

3.3.12 Lema. *Seja $w \in W$ e $x \in M_k^{\perp}$, para algum M_k. Defina $A := P_{w,x}$ para algum $P \in G(R)$. Seja $X_k \in M_k$ algum auto-valor não-trivial. Seja $W' =$span$\langle W, X_k\rangle$. Então W' é flat em relação ao sistema de holonomia $S^A = [V, A(R), G]$.*

Demonstração. Inicialmente definimos $\mathcal{J} = \{A \in \mathcal{G}; A(Q)|_{M_k} = 0\texttt{paraqualquer}Q \in G(R)\}$. Pelo Teorema (3.3.2) (b), se $m \in M_k$, $x \in M_k^{\perp}$ e $Q \in G(R)$, então $Q_{m,x} \in \mathcal{J}$ e $\mathcal{J}$ é um ideal de $\mathcal{G}$. Ora, como $w \in W \subset M_k$ e $x \in M_k^{\perp}$, segue que $A = P_{w,x} \in \mathcal{J}$ e $g \circ A \circ g^{-1} \in \mathcal{J}$, daí $A(Q)_{m,n}p = 0$ e $g \circ A \circ g^{-1}(Q)_{m,n}p = 0$ $\forall m, n, p \in M_k$. E como isso funciona para todo $Q \in G(R)$, em particular funciona para $Q = g(R)$. Assim

$g \circ A \circ g^{-1}(g(R))_{m,n}p = 0 \therefore g(A(R))_{m,n}p = 0$, donde para quaisquer $m, n, p \in M_k$ e $Q \in G(A(R))$ arbitrário,

$$Q_{m,n}p = 0 \tag{*}$$

Notemos agora que dado $Q \in G(A(R))$, então $Q_{m,n}(M_l) \subsetneqq M_l$ para todo $m, n \in M_k$ e para qualquer M_l. Com efeito, lembremos que M_l é definido a partir do conjunto U_l, logo provar que $Q_{m,n}(M_l) \subsetneqq M_l$ é provar que para qualquer $P \in G(R), u \in U_l$ e $y \in M_l$ temos

$$P_{u,Q_{m,n}y} = 0,$$

mas por (3.19)

$$P_{u,Q_{m,n}y} + P_{Q_{m,n}u,y} = 0 \Longrightarrow P_{u,Q_{m,n}y} = -P_{Q_{m,n}u,y} \overset{(*)}{=} 0,$$

pois $m, n, u \in M_k$ (lembre que $u \in U_l \subseteq W \subsetneqq M_k$). Daí $P_{u,Q_{m,n}y} = 0$ e $Q_{m,n}y \in M_l$.

Agora queremos mostrar, de fato, que W' é flat em relação à S^A,i.e., que $Q_{w'_1,w'_2} = 0$ para quaiquer $w'_1, w'_2 \in W'$ e $Q \in G(A(R))$. Mas pelo Lema (3.3.10) $V = \sum_k M_k$, donde basta provar que

$$\left\langle Q_{w'_1,w'_2}x, y \right\rangle = 0 \ \ \forall x \in M_p, y \in M_l.$$

Ora, se $w'_1, w'_2 \in \langle W \rangle$, então $Q_{w'_1,w'_2} = 0$ pois W é flat. Já se $w'_1, w'_2 \in \langle X_k \rangle$, também é trivial que $Q_{w'_1,w'_2} = 0$. Logo o único caso não-trivial é $w'_1 \in W$ e $w'_2 \in \langle X_k \rangle$. Para este caso é suficiente provar que

$$\langle Q_{w,X_k x,y} \rangle = 0$$

para todo $Q \in G(A(R))$, $w \in W$, $x \in M_p$ e $y \in M_l$.

Se $M_p = M_k$, então $Q_{w,X_k}x = 0$ por (*) e se $M_l = M_k$, então $\langle Q_{w,X_k}x, y \rangle \overset{(3.6)}{=} - \langle Q_{w,X_k}y, x \rangle = 0$ por (*).

Agora, se $M_p \neq M_l$ e ambos diferentes de M_k, temos que dados $x \in M_p, y \in M_l$

$$\langle Q_{w,X_k}x, y \rangle \overset{(3.7)}{=} \langle Q_{x,y}w, X_k \rangle \overset{(3.5)}{=} - \langle Q_{w,x}y, X_k \rangle - \langle Q_{y,w}x, X_k \rangle = 0,$$

pois $w, x \in M_p \Longrightarrow Q_{w,x}y \in M_l$, $X_k \in M_l^{\perp}$ **e** $w, y \in M_l \Longrightarrow Q_{w,y}x \in M_p$, $X_k \in M_p^{\perp}$.

Finalmente o último caso que nos resta discutir é quando $M_p = M_l \neq M_k$. Mas aqui, pelo caso (2) do Lema (3.3.11), $X_k \notin M_l$. Já pelo Lema (3.3.7), sabemos que $X_k \in M_l^{\perp}$, donde

$$\langle Q_{w,X_k}x, y\rangle \stackrel{(3.7)}{=} \langle Q_{x,y}w, X_k\rangle = 0,$$

pois $Q_{x,y}w \in M_l$ $\square$(Lema (3.3.12))

Então seja A definido como no Lema (3.3.12). É claro que $\mathcal{G}^{A(R)} \subsetneqq \mathcal{G}^R$ e que dados $P \in \mathcal{G}^R$ e $Q_{x,y} \in \mathcal{G}^{A(R)}$ temos que $P(Q) \in G(A(R))$ e $Q(P) \in G(A(R))$ $\therefore$ $P(Q)_{x,y}$ e $Q(P)_{x,y} \in \mathcal{G}^{A(R)}$,i.e., $\mathcal{G}^{A(R)}$ é ideal de $\mathcal{G}^R$.

Além disso, W é subespaço flat maximal de V, donde pela demonstração do Teorema (3.3.2) sabemos que $\mathcal{G}^R(W) \subsetneqq W^{\perp}$.

Agora, como W é também subespaço próprio de W' e pelo Lema (3.3.12) W' é flat em relação à $S^A = [V, A(R), G]$, então

$$\mathcal{G}^{A(R)}(W') \subsetneqq (W')^{\perp},$$

donde vemos que $\mathcal{G}^{A(R)}$ é um ideal próprio de $\mathcal{G}^R$, i.e.,

$$\dim\, G^{A(R)} < \dim\, G^R$$

3.3.13 Lema. *Existe uma base $\{A_i\}$ de $\mathcal{G}^R$ com a seguinte propriedade:*

$$dim\ \mathcal{G}^{A_i(R)} < dim\ \mathcal{G}^R$$

Demonstração. Pelo Lema (3.3.11), podemos escolher uma base $\{x_i\}$ de $W^{\perp}$ tal que cada $x_i \in M_k^{\perp}$ para algum M_k. Se estendemos isto por uma base de W, obtendo assim uma base y_i de V, segue pelo que foi comentado após o Lema (3.3.12) que dim $\mathcal{G}^{Q_{w,y_i}} <$ dim$\mathcal{G}^R$ $\forall w \in W$ e $\forall Q \in G(R)$.

Por (3.12), $g(W)$ é flat maximal para qualquer $g \in G$. Além disso,

$$Z(g(W)) = \{z \in V; T_Q(w,v)(z) = 0\ \ \forall v, w \in g(W)\ \text{ e }\ \forall Q \in G(R)\}$$

daí $z \in Z(g(W)) \iff Q_{g(\tilde{w}),g(\tilde{z})}g(\tilde{v}) = 0\ \forall \tilde{w}, \tilde{v} \in W$ e $g(\tilde{z}) \in Z(g(W))\ \forall Q \in G(R) \iff$ $Q_{g(\tilde{w}),g(\tilde{z})}g(\tilde{v}) = g \circ Q_{\tilde{w},\tilde{z}} \circ g^{-1} \circ g(\tilde{v}) = 0\ \forall \tilde{w}, \tilde{v} \in W$ e $g(\tilde{z}) \in Z(g(W))\ \forall Q \in G(R) \iff$

$Q_{\tilde{w},\tilde{z}}\tilde{v} = 0\ \forall \tilde{w}, \tilde{v} \in W$ e $\forall Q \in G(R) \iff \tilde{z} \in Z(W)$, ou seja, $Z(g(W)) = g(Z(W))$, e assim $Z(g(W)) \neq V$. Assim os Lemas (3.3.9), (3.3.10), (3.3.11), e (3.3.12) são válidos para $g(W)$, donde existe uma **outra base** $\{y_i\}$ de V com a propriedade

$$\dim \mathcal{G}^{Q_{g(w),y_i}(R)} < \dim \mathcal{G}^R$$

Ora, $\mathcal{G}$ age irredutivelmente sobre V e como g e w percorrem G e W, respectivamente, os $g(W)$ geram V. Assim as transformações $\{Q_{g(w),y_i}\}$ geram $\mathcal{G}^R$. Daí podemos escolher uma base $\{A_i\}$ de G^R tal que cada A_i é do tipo $Q_{g(w),y_i}$ e elas satisfazem as propriedades desejadas. $\square$(Lema (3.3.13))

Para finalmente concluirmos a demonstração do Teorema (3.3.3), vamos fazer uma nova indução sobre dim $\mathcal{G}^R$. I.e., vamos considerar sistemas de holonomia de dimensão $n+1$ (não se esqueça da hipótese de indução que fizemos no início desta prova e que ainda não terminamos de usá-la) e fazer indução sobre $k =$ dim $\mathcal{G}^R$.

É óbvio que o teorema é válido para $k = o$ e vamos supor que seja também válido para $k \leq p$.

Seja $S = [V, R, G]$ um sistema de holonomia de dimensão $n+1$ tal que dim $\mathcal{G}^R = p+1$. Pela Proposição (3.1.11), para qualquer $B \in G_R$, temos que $B(R) = 0$, então o Lema (3.3.13) implica que existe uma base $\{A_i\}$ de $\mathcal{G}$ tal que

$$dim\, \mathcal{G}^{A_i(R)} \leqq p \qquad *$$

Considere o sistema de holonomia $S^{A_i} = [V, A_i(R), G]$, cuja dimensão é igual à dim $V = n+1$ e S^{A_i} é irredutível. Pela nossa segunda hipótese de indução e por (*), cada um dos sistemas S^{A_i} são simétricos.

Assim para qualquer $B \in \mathcal{G}$ e qualquer A_i, temos $B(A_i(R)) = 0$. Como os A_i's geram $\mathcal{G}$, temos que para quaisquer $A, B \in \mathcal{G}, B(A(R)) = 0$ e em particular, $B^2(R) = 0$. Mas B é um operador anti-simétrico sobre o espaço de todos os tensores de V quando eles são dotados da métrica euclidiana standard induzida por estes sobre V. Assim, $B^2(R) = 0$ implica que $B(R) = 0$. E como isso é válido para todo $B \in \mathcal{G}$, temos por definição que S é simétrico. $\square$(Teorema (3.3.3))

3.4 Uma Classificação Parcial

Apesar de termos falado na última seção que provaríamos o "resultado principal", é importante notarmos que o Teorema de Berger, o nosso verdadeiro foco, ainda não foi concluído até o presente momento desta dissertação. Mas podemos dizer que 90% do trabalho já foi feito.

Matematicamente falando, neste capítulo ainda não apareceu a palavra **"variedade"** em nenhum resultado; só o que fizemos foi obter resultados para sistemas de holonomia e comentar que à certos sistemas deste tipo correspondem certas variedades Riemannianas.

Nesta seção vamos começar a provar alguns resultados em variedades e fazer, de certo modo, as adaptações necessárias dos resultados anteriores a esse caso, e assim finalmente na seção 4.5 concluirmos o demonstração do Teorema de Berger. É importante dizermos que neste momento é necessário um entendimento básico da teoria de integração de Häar, que foi visto brevemente (mas de modo suficiente) no capítulo 1.

Seja $S = [V, R, G]$ um sistema de holonomia irredutível. Suponha $R \neq 0$. Então pelo corolário da Proposição (3.1.18), G^R é irredutível. Suponha S simétrico e lembre que à tal S corresponde um espaço simétrico Riemanniano simplesmente conexo e irredutível M, tendo R como seu tensor de curvatura.

Seja $p \in M$ e denote por I_p a componente conexa do grupo de isotropia em p, i.e., o grupo de isometrias de M que têm p como ponto fixo. Sabemos que uma isometria é determinada por sua ação em um único ponto. Daí podemos considerar I_p como um subgrupo do grupo ortogonal sobre T_pM.

Seja G um grupo conexo de isometrias de T_pM. Como estamos considerando M simétrico, sabemos que $G \subseteqq I_p$ se e somente se $g(R) = R$, $\forall g \in G$ [9].

Denotemos agora por H_p o grupo de holonomia de M em p. Se M é simplesmente conexo, então H_p é conexo. Assim temos que $H_p \subseteqq I_p$.

Novamente, pela teoria dos espaços simétricos, sabemos que se M é simétrico e irredutível, então $I_p = H_p$. Assim como anteriormente, a prova deste fato encontra-se em [9].

3.4.1 Proposição. *Seja $S = [V, R, G]$ um sistema de holonomia simétrico e irredutível com $R \neq 0$. Então $G^R = G$.*

Demonstração. Ora, lembremos que G^R foi definido por $\exp \mathcal{G}^R$, onde $\mathcal{G}^R$ era o subespaço de $\mathcal{G}$ gerado por todos os $Q_{x,y}$ tais que $Q \in G(R)$ e $x, y \in V$. Por sua vez, se $Q \in G(R)$, então $Q_{x,y} = \sum_{i=1}^{n} g_i \circ R_{g_i^{-1}(x), g_i^{-1}(y)} \circ g_i^{-1}$. Mas pelo Teorema de Ambrose-Singer (capítulo 2), sabemos que essas transformações $g_i \circ R_{g_i^{-1}(x), g_i^{-1}(y)} \circ g_i^{-1}$ geram $\mathcal{H}$, a álgebra de holonomia de H_p, donde segue que $G^R = H_p$. Como para qualquer $g \in G$, temos $g(R) = R$, então $G \subseteqq I_p$. Assim, $G^R \subseteqq G \subseteqq I_p = H_p = G^R \therefore G^R = G$. $\square$

3.4.2 Definição. *Seja R um tensor de curvatura sobre V. Já observamos que R define uma transformação simétrica de $\Lambda^2 V \longrightarrow \Lambda^2 V$. Denote por $K(R)$, chamado curvatura escalar, o **traço** dessa transformação.*

Afirmação: $K(R)$ definido como acima satisfaz:

$$K(aR + bQ) = aK(R) + bK(R) \tag{3.21}$$

$$K(g(R)) = K(R), g \in O(n) \tag{3.22}$$

Se $x_1, ..., x_n$ é uma base ortonormal de V, então

$$K(R) = \sum_{i<j} \left\langle R_{x_i, x_j} x_i, x_j \right\rangle \tag{3.23}$$

Demonstração. ver [6].

Suponhamos agora que $S = [V, R, G]$ seja um sistema de holonomia. Denotemos por $N(G) \subseteqq O(n)$ a **componente conexa do normalizador**[1] **de G** e por $N(\mathcal{G})$ a sua álgebra de Lie, i.e., $A \in N(\mathcal{G})$ se, e somente se, $[A, \mathcal{G}] \subseteqq \mathcal{G}$. Isso segue do fato de $G \subseteqq N(G)$ e assim $\mathcal{G} \subseteqq N(\mathcal{G})$ ser subálgebra de Lie de $N(\mathcal{G})$.

[1]Lembre que se $H < G$, então o normalizador de H é definido por: $N(H) := \{g \in G; gHg^{-1} = H\}$.

Ora, $\mathcal{G}^R \subseteqq \mathcal{G} \subseteqq N(\mathcal{G})$. Assim, como $\mathcal{G}^R$ é ideal de $\mathcal{G}$ e $N(G)$ é compacto, então $\mathcal{G}^R$ é um ideal de $N(\mathcal{G})$. Desse modo, podemos escrever $N(\mathcal{G})$ como:

$$N(\mathcal{G}) = \mathcal{G}^R \oplus N(\mathcal{G})_R,$$

onde $N(\mathcal{G})_R$ é o ideal complementar à $\mathcal{G}^R$, i.e, além da igualdade acima, temos que $\mathcal{G}^R \bigcap N(\mathcal{G})_R = \{0\}$, $[\mathcal{G}^R, N(\mathcal{G})_R] = 0$, $[\mathcal{G}^R, \mathcal{G}^R] \subseteqq \mathcal{G}^R$ e $[N(\mathcal{G})_R, N(\mathcal{G})_R] \subseteqq N(\mathcal{G})_R$.

Assim como tínhamos para $\mathcal{G}_R$ na Proposição (3.1.11), é verdade que:

3.4.3 Proposição. *Se $A \in N(\mathcal{G})_R$, então $A(R) = 0$.*

Demonstração. Ora, de maneira análoga à demonstração da Proposição (3.1.11), temos

$$\langle A(R)_{x,y}z, w\rangle = -\left\langle R_{A(x),y}z, w\right\rangle - \left\langle R_{x,A(y)}z, w\right\rangle - \langle [R_{x,y}, A], w\rangle$$

Como $R_{x,y} \in \mathcal{G}^R$ e $A \in N(\mathcal{G})_R$, então $[R_{x,y}, A] = 0$

Agora,

$$-\left\langle R_{A(x),y}z, w\right\rangle - \left\langle R_{x,A(y)}z, w\right\rangle \overset{(3.7)}{=} -\langle R_{z,w}A(x), y\rangle - \langle R_{z,w}x, A(y)\rangle \overset{def}{=} -\langle [R_{z,w}, A]x, y\rangle = 0$$

$\square$(Prop (3.4.3))

Segue diretamente da Proposição (3.4.3) que para qualquer $h \in N(G)$

$$h(R) \in G(R) \tag{3.24}$$

3.4.4 Teorema. *Seja $S = [V, R, G]$ um sistema de holonomia irredutível e suponha $K(R) \neq 0$, definido da maneira usual. Então $G^R = G = N(G)$. Além disso, existe um outro tensor de curvatura não-zero R' sobre V tal que $S' = [V, R', G]$ é um sistema de holonomia irredutível e simétrico. Se S é simétrico, então $R = R'$.*

Demonstração. Queremos construir um tensor de curvatura R' tal que o sistema de holonomia $S = [V, R', G]$ seja simétrico e irredutível, i.e., queremos que $g(R') = R'$. Mas se consideramos o grupo $N(G) \supseteq G$, no qual a existência de uma integral de Haar é garantida pelo teorema (1.1.7), não será difícil definir um tensor de curvatura sobre ele que faça o sistema de holonomia $S = [V, R', N(G)]$ ser simétrico. De fato, pelo resultado acima citado, sabemos que se $f : N(G) \longrightarrow E$ é uma função contínua, E um espaço euclidiano e o fato de $N(G)$ ser compacto, podemos definir a integral de Haar sobre $N(G)$ e teremos que $\int_{N(H)} f$ é um elemento do contradomínio de f. Defina agora,

$$R' := \int_{N(G)} h(R)$$

É claro que $K(R') = K(R) \neq 0$, pois $K(g(R)) = K(R)$ sempre que $g \in O(n)$ e $\int_{N(G)} h(R)$ é um elemento do contradomínio de $h(R)$. Mais que isso, como K é $\mathbb{R}$-linear em $G(R)$ (equação (3.21)), temos que $R' \neq 0$.

Daí, por (3.24) e o fato de $h(R) \in G(R)$, temos que $R' \in G(R)$ e assim

$$R'_{x,y} \in \mathcal{G}^R \tag{3.25}$$

Novamente pela principal propriedade da integral de Haar, i.e., a propriedade de ser invariante por translações, temos que $h(R') = R'$ para qualquer $h \in N(G)$. Assim $S' = [V, R', N(G)]$ é um sistema de holonomia irredutível e simétrico.

Mas pela Proposição (3.4.1), temos que $N(G) = N(G)^{R'}$. E consequentemente a equação (3.25) nos diz que $N(G)^{R'} \subseteqq G^R$. Daí,

$$N(G) = N(G)^{R'} \subseteqq G^R \subseteqq G \subseteqq N(G)$$

e assim,

$$N(G) = G = G^R.$$

Ora, sabemos que se $A = N(\mathcal{G})_R$, então $A(R) = 0$. Tome $A \in N(\mathcal{G}) = \mathcal{G}$ arbitrário. Se S é simétrico, então $A(R) = 0 = A(R')$ e como a escolha foi arbitrária, segue que $R = R'$ $\square$(Teor (3.4.4))

3.4.5 Corolário. *Seja $S = [V, R, G]$ um sistema de holonomia irredutível. Se $K(R) \neq 0$ e S não é simétrico, então G é o grupo de holonomia de um espaço simétrico e irredutível de posto 1.*

Demonstração. Ora, pelo Teorema (3.4.4), existe um tensor de curvatura R', definido na demonstração deste teorema, tal que o sistema de holonomia $S' = [V, R', G]$ é simétrico. Além disso, S' é também irredutível e assim a maior dimensão possível de um subespaço flat é 1. $\square$

3.5 O Teorema de Montgomery-Samelson e a Conclusão da Demonstração

Nesta seção vamos finalmente juntar os resultados anteriores, enunciar o resultado de Montgomery e Samelson que aparece em [12] e exibir mais alguns outros resultados que nos permitam concluir a demonstração do Teorema de Berger.

Para isso vamos usar um resultado não publicado devido à B. Kostant, chamado neste trabalho de Teorema (3.5.1).

Lembremos que na seção 4.1, $\mathcal{A}$ denotava a álgebra de Lie de todas as transformações anti-simétricas de V. Sobre $\mathcal{A}$ existe um produto interno natural negativo definido, denotado por $\langle\ ,\ \rangle$. Para $A, B \in \mathcal{A}$, $\langle A, B\rangle = tr(A.B)$.

Seja $\mathcal{G}$ a álgebra de Lie de algum grupo compacto de isometrias de V ($\subsetneqq O(n)$). Denote por $K(\ ,\ )$ a forma de Killing sobre $\mathcal{G}$.

Pelo que comentamos na seção 1.2, do capítulo 1, sabemos que $K(,)$ é negativo semi-definido. Assim $K(\ ,\ ) + \langle\ ,\ \rangle$ é um produto interno negativo definido sobre $\mathcal{G}$.

Sabemos da álgebra linear que, neste caso, existe uma transformação linear $T : \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{G}$ tal que,

$$K(A, B) + \langle A, B\rangle = \langle A, T(B)\rangle \tag{3.26}$$

onde T é não-singular e

$$\langle A, T(B)\rangle = \langle T(A), B\rangle \tag{3.27}$$

Usando $\langle\ ,\ \rangle$ sobre V e sobre $\mathcal{A}$, existe uma identificação natural de $\Lambda^2 V$ com $\mathcal{A}$, dada por

$$\begin{array}{rcl} x \wedge y & \longrightarrow & (x \wedge y) \\ \langle A, (x \wedge y)\rangle & = & \langle A(x), y\rangle \end{array} \tag{3.28}$$

Finalmente seja $P : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{G}$ a projeção de $\mathcal{A}$ definida sobrejetivamente em $\mathcal{G}$ via $\langle\ ,\ \rangle$.

3.5.1 Teorema. *Seja $S = [V, R, G]$ um sistema de holonomia simétrico e irredutível. Então existe uma constante λ tal que*

$$R_{z,w} = \lambda(T^{-1} \circ P)((z \wedge w))$$

Demonstração. Podemos assumir $R \neq 0$, caso contrário bastaria tomar $\lambda = 0$.

Analogamente ao que fizemos na seção 1, seja $J = \mathcal{G} \oplus V$. É também análogo mostrarmos que J é uma álgebra de Lie com $[,]_J$ dado por:

$$\begin{aligned} [x,y]_J &= R_{x,y} && \text{para } x,y \in V \\ [A,B]_J &= [A,B] && \text{para } A,B \in \mathcal{G} \\ [A,x]_J &= A(x) && \text{para } A \in \mathcal{G}, x \in V \end{aligned}$$

Obs: Novamente, nem sempre usaremos o sub-índice J para indicar que o colchete é em J. Ficará subentendido sempre que não houver confusão.

Como $R \neq 0$ e G age irredutivelmente sobre S, temos pela Proposição (3.4.1) que $G = G^R$ (e consequentemente $\mathcal{G} = \mathcal{G}^R$), e assim $\mathcal{G}$ é o espaço gerado pelos $[x, y]$ $(= R_{x,y})$. Mais que isso, temos que J é semi-simples, cuja demonstração desse fato encontra-se em [3].

Seja $B(,)$ a forma de Killing sobre J. Como J é semi-simples, o critério de Cartan nos garante que B é forma bilinear invariante não-degenerada.

Usando as definições acima e as propriedades das formas de Killing em álgebras semi-simples, temos:

$$B(A,x) = 0, \;\; A \in \mathcal{G} \text{ e } x \in V \tag{3.29}$$

$$B(A,\tilde{A}) = K(A,\tilde{A}) + \left\langle A,\tilde{A} \right\rangle \tag{3.30}$$

$$B|_V \text{ é não-degenerada} \tag{3.31}$$

Demonstração. ver [8] e [3]

Ora, B é forma de Killing, portanto invariante sob ad$J$, e assim em particular temos que $B|_V$ é uma forma bilinear sobre V, invariante sob a ação de G. Mas como G age irredutivelmente sobre V, existe um escalar λ tal que

$$B(x,y) = \lambda \langle x,y \rangle \;\; \forall x,y \in V \tag{3.32}$$

Por (3.31), $\lambda \neq 0$. Já por (3.28)

$$\langle A(z), w\rangle = \langle [A, z], w\rangle = \langle A, (z \wedge w)\rangle$$

e se fizermos $A = [x, y]$ temos

$$\langle [[x, y], z], w\rangle = \langle [x, y], (z \wedge w)\rangle \tag{*}$$

Por outro lado, (3.32) nos diz que

$$\langle [[x, y], z], w\rangle = \frac{1}{\lambda} B([[x, y], z], w)$$

mas B é invariante, donde

$$\frac{1}{\lambda} B([[x, y]z, w]) = \frac{1}{\lambda} B([x, y], [z, w]).$$

Agora por (3.26) e (3.30) temos que

$$\frac{1}{\lambda} B([x, y], [z, w]) = \frac{1}{\lambda} \langle [x, y], T[z, w]\rangle$$

Donde segue que

$$\langle [[x, y], z], w\rangle = \frac{1}{\lambda} \langle [x, y], T[z, w]\rangle \tag{**}$$

Combinando (*) e (**),

$$\langle [x, y], (z \wedge w)\rangle = \frac{1}{\lambda} \langle [x, y], T[z, w]\rangle .$$

Mas como isso é válido para todos os $[x, y]$, que por sua vez geram G, temos

$$P((z \wedge w)) = \frac{1}{\lambda} T[z, w]$$

E assim segue finalmente que

$$[z, w]_J = \lambda(T^{-1} \circ P)((z \wedge w))$$

ou pela nossa definição de $[,]_J$

$$R_{z,w} = \lambda(T^{-1} \circ P)((z \wedge w))$$

$\square$(Teorema (3.5.1))

3.5.2 Corolário. *Sejam R e R' dois tensores de curvatura não nulos sobre V. Seja G um grupo compacto de isometrias agindo irredutivelmente sobre V. Suponha que $S = [V, R, G]$ e $S' = [V, R', G]$ são ambos sistemas de holonomia* ***simétricos****. Então $R = cR'$, onde c é um número real diferente de zero.*

Demonstração. Do Teorema (3.5.1) segue que $R_{z,w} = \lambda_R(T^{-1} \circ P)((z \wedge w))$ e $R'_{z,w} = \lambda_{R'}(T^{-1} \circ P)((z \wedge w))$.Daí $\dfrac{R_{z,w}}{\lambda_R} = \dfrac{R'_{z,w}}{\lambda_{R'}}$ $\forall z, w \in V$. Donde basta tomar $c = \dfrac{\lambda_R}{\lambda_{R'}}$ □

Sabemos que se R é um tensor de curvatura sobre V, ele induz um produto interno simétrico sobre V denotado por $L_R(,)$, chamado **tensor de Ricci** (para mais detalhes, ver do Carmo, Geometria Riemanniana).

Lembremos que este tal tensor é difinido por:

3.5.3 Definição. *Dados $x, y \in V$, considere a aplicação $\phi(x, y) : V \longrightarrow V$ tal que $\phi(x, y)(v) = R_{x,v}y$, $\forall v \in V$. Então, $L_R(x, y) := tr(\phi(x, y))$.*

Para mostrar que L_R é simétrico, escolha uma base ortonormal $\{z_i\}$ de V. Então,

$$L_R(x, y) = \sum_{i=1}^{n} \langle R_{x,z_i}y, z_i\rangle \overset{(3.7)}{=} \sum_{i=1}^{n} \langle R_{y,z_i}x, z_i\rangle = L_R(y, x).$$

Agora suponha que $S = [V, R, G]$ é um sistema de holonomia irredutível. Então vale que

$$L_R(g(x), g(y)) = L_R(x, y)$$

pois $L_R(g(x), g(y)) = \sum_{i=1}^{n} \left\langle R_{g(x),z_i}g(y), z_i\right\rangle = \sum_{i=1}^{n} \left\langle R_{z_i,g(x)}z_i, g(y)\right\rangle = \sum_{i=1}^{n} \langle R_{z_i,x}z_i, y\rangle = L_R(x, y)$.

Assim como no caso da equação (3.32), o fato de que G age irredutivelmente, garante a existência de um número real β tal que

$$L_R(,) = \beta\,\langle\ ,\ \rangle \tag{3.33}$$

Além disso, se $R \neq 0$, então $\beta \neq 0$. Logo, com as mesmas notações do Teorema (3.5.1), temos que

$$L_R(x, x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\lambda} B([x, z], [x, z_i]). \tag{3.34}$$

3.5.4 Teorema. *Seja M uma variedade Riemanniana de dimensão ≥ 3. Denote por R o campo tensorial de curvatura sobre M e por R^p o tensor de curvatura sobre T_pM para cada $p \in M$. Suponha que exista uma função definida em M evaluada nos reais tal que*

$$L_{R^p}(,) = f(p)\langle\ ,\ \rangle$$

para cada $p \in M$. Então f é uma constante.

Demonstração. ver [7].

3.5.5 Teorema. *Seja M uma variedade Riemanniana irredutível* [1] *de dim$\geqq 3$. Para cada $p \in M$, denote por H_p a componente conexa do grupo de holonomia sobre T_pM que contém a identidade. Pelo Teorema de Ambrose-Singer, $S_p = [T_pM, R^p, H_p]$ é um sistema de holonomia irredutível. Se cada S_p é simétrico, então M é simétrico.*

Demonstração. Primeiramente, como as transformações dadas pelos R^p (tensor de curvatura de T_pM) no Teorema de Ambrose-Singer geram $\mathcal{H}_p$, e $\mathcal{H}_p$ é a álgebra de Lie de H_p, temos de fato que $S_p = [T_pM, R^p, H_p]$ é um sistema de holonomia irredutível.

Por (3.33) e pelo Teorema (3.5.4), existe uma constante β tal que

$$L_{R^p}(,) = \beta\langle\ ,\ \rangle \quad \forall p \in M. \tag{3.35}$$

Como M é irredutível, tem que existir um $p \in M$ tal que $R^p \neq 0$, por definição.

Por (3.34) vemos que $\beta \neq 0$ e então

$$R^q \neq 0 \quad \forall q \in M \tag{3.36}$$

Seja γ uma curva suave por partes que liga q à p. Seja $P_\gamma : T_qM \longrightarrow T_pM$ o transporte paralelo ao longo de γ. Por $P_\gamma(R^q)$ entendemos o seguinte tensor de curvatura

[1] Sejam (M_1, g_1) e (M_2, g_2) duas variedades Riemannianas. Podemos definir a métrica produto $g_1 \times g_2|_{(p_1,p_2)} = g_1|_{p_1} + g_2|_{p_2}$ em $M_1 \times M_2$ e chamamos esse par $(M_1 \times M_2, g_1 \times g_2)$ de produto Riemanniano das variedades (M_1, g_1) e (M_2, g_2). Dizemos ainda que uma variedade Riemanniana (M,g) é **redutível** se ela é isométrica a um produto como acima. Dizemos que ela é **localmente redutível** se todo ponto de M possui vizinhança redutível. E finalmente, dizemos que M é **irredutível** se ela não é localmente redutível.

sobre T_pM:

$$P_\gamma(R^q)_{x,y} = P_{\gamma^{-1}} \circ R_{\gamma^{-1}(x),\gamma^{-1}(y)} \circ P_\gamma.$$

Para provar o Teorema (3.5.5) temos que provar que para todo $p, q \in M$ e γ curva suave por partes

$$P_\gamma(R^q) = R^p$$

Como já mencionamos, o Teorema de Ambrose-Singer implica que

$$S_{\gamma(p)} = [T_pM, P_\gamma(R^q), H_p]$$

é um sistema de holonomia irredutível. Se $g \in H_p$, então $P_{\gamma^{-1}} \circ g \circ P_\gamma \in H_q$. Pela hipótese de S_p ser simétrico temos que

$$(P_{\gamma^{-1}} \circ g \circ P_\gamma)(R^q) = R^q$$

Assim,

$$g(P_\gamma(R^q)) = P_\gamma(R^q)$$

donde $S_{\gamma(p)}$ é um sistema de holonomia simétrico.

Agora por (3.36) e pelo Corolário do Teorema (3.5.1),

$$P_\gamma(R^q) = c.R^p \tag{3.37}$$

E assim segue que

$$L_{P_\gamma(R^q)}(\ ,\ ) = c.L_{R^p}(\ ,\ )$$

Mas por (3.35)

$$L_{P_\gamma(R^q)}(\ ,\ ) = \beta\langle\ ,\ \rangle = L_{R^p}(\ ,\ )$$

Assim $c = 1$ e por (3.37)

$$P_\gamma(R^q) = R^p$$

o que conclui a demonstração. □(Teorema (3.5.5))

3.5.6 Teorema. *Seja M uma variedade Riemanniana conexa irredutível. Se o grupo de holonomia H_p é não transitivo sobre a esfera unitária em T_pM, então M é um espaço localmente simétrico de dimensão $\geqq 2$.*

Demonstração. Como nós assumimos M conexa, então ou H_p é transitivo para todo $p \in M$ ou H_p não é transitivo para nenhum p. Por hipótese, vamos assumir a segunda opção. Podemos supor $\dim M \geqq 3$. Como o único grupo conexo de isometrias agindo não-transversalmente sobre S^1 é a identidade, isso contradiria a hipótese de irredutibilidade. Assim a demonstração segue diretamente dos Teoremas (3.3.3) e (3.5.5). $\square$(Teorema (3.5.6))

Daí, se (M, g) é uma n-variedade Riemanniana simplesmente conexa, irredutível e não simétrica, então o grupo de holonomia $Hol_p(g)$ age transitivamente sobre a esfera unitária em T_pM, S^{n-1}. Mas, como já comentamos, devido ao resultado abaixo, a lista dos subgrupos de Lie compactos de $O(n)$ que agem transitivamente sobre a esfera unitária é conhecida.

3.5.7 Teorema. ***(Montgomery-Samelson)*** *Os subgrupos de Lie compactos e conexos G de $O(n)$ que agem transitivamente sobre a esfera unitária são:*

(i) $G = SO(n)$;

(ii) $n = 2m$ *com* $m \geq 2$, *e* $G = U(m)$ *em* $SO(2m)$;

(iii) $n = 2m$ *com* $m \geq 2$, *e* $G = SU(m)$ *em* $SO(2m)$;

(iv) $n = 4m$ *com* $m \geq 2$, *e* $G = Sp(m)$ *em* $SO(4m)$;

(v) $n = 4m$ *com* $m \geq 2$, *e* $G = Sp(m)Sp(1)$ *em* $SO(4m)$;

(vi) $n = 7$ *e* $G = G_2$ *em* $SO(7)$;

(vii) $n = 8$ *e* $G = Spin(7)$ *em* $SO(8)$.

(viii) $n = 9$ *e* $G = Spin(9)$ *em* $SO(15)$

(ix) $m > 1$ *e* $G = Sp(m)U(1)$ *em* $SO(4m-1)$

Agora, é claro que se comparamos esse resultado ao Teorema de Berger, vemos que de (i) à (vii) a lista se repete e aparecem mais dois grupos: o (viii) e o (ix). Porém, em [1] é provado que o caso (viii) não pode ocorrer como grupo de holonomia. Quanto ao grupo $Sp(m)U(1)$, o próprio Marcel Berger observou, motivado pelo Teorema de Ambrose-Singer, que ele não poderia ser um grupo de holonomia.

Como uma consideração final, notamos então que, sob as hipóteses do Teorema (3.5.6), se H é grupo de holonomia, então pelo Teorema de Montgomery-Samelson um dos sete casos (i)-(vii) ocorre. Donde finalmente temos uma demonstração para o Teorema de Berger.

É claro que esses resultados citados acima não são triviais, caso contrário a demonstração seria apresentada aqui. Para mais detalhes, o leitor poderia ver os artigos originais ou mesmo o excelente texto de Simon Salamon [13], onde o autor faz uma análise razoavelmente cuidadosa desses resultados acima citados (muitas coisas não triviais são deixadas a cargo do leitor, mas a filosofia passada no texto é excelente).

Capítulo 4

Considerações Finais

Terminamos o capítulo 2 com o enunciado do teorema de Berger, que exibia uma lista com 7 subgrupos de Lie fechados e conexos de SO(n). Nesse último capítulo, vamos dar as definições e fazer comentários sobre o que se conhece desses grupos e o que falta ser descoberto.

(i) SO(n) é o grupo de holonomia de métricas Riemannianas gerais.

(ii) As métricas Riemannianas g com $\mathrm{Hol}(g) \subseteq \mathrm{U}(m)$ são as métricas de Kähler. Essas são métricas definidas em variedades complexas e uma boa referência sobre o assunto é o livro [11], incluindo o volume 2.

(iii) Métricas g com $\mathrm{Hol}(g) \subseteq \mathrm{SU}(m)$ são as chamadas métricas de Calabi-Yau, que em particular também são métricas de Kähler. É possível provar que se g é Kähler, então $\mathrm{Hol}(g) \subseteq \mathrm{SU(m)}$ se, e somente se, g é Ricci-flat. Exemplos de variedades que satisfazem tais propriedades foram dados por Calabi, e no caso da variedade ser compacta, apareceu na solução que S. T. Yau deu para a conjectura de Calabi. É interessante notar que tais métricas são de extrema importância na física, em especial, na teoria das cordas.

(iv) Métricas g com holonomia $\mathrm{Hol}(g) \subseteq \mathrm{Sp(m)}$ são chamadas métricas hiper-Kähler. Como $\mathrm{Sp}(m) \subseteq \mathrm{SU}(2m) \subset \mathrm{U}(2m)$, métricas hiper-Kähler são em particular métricas de Kähler Ricci-flat. Assim como no caso anterior, exemplos de métricas em variedades que satisfazem tais hipóteses foram dados por Calabi e Yau.

(v) A métrica g com $\mathrm{Hol}(g) = \mathrm{Sp}(m).\mathrm{Sp}(1)$ para $m \geq 2$ é chamada métrica de Kähler quaterniônica. Essa é métrica é Einstein, mas não é Ricci-flat e, na verdade, variedades com métricas de Kähler quaterniônicas não são de fato Kähler. Exemplos de tais variedades foram dados por Galicki e Lawson.

(vi) e (vii) Os grupos de holonomia G_2 e $\mathrm{Spin}(7)$ são chamados de grupos de holonomia excepcionais. A existência de métricas com tais holonomias foi dada primeiro por R. L. Bryant. Exemplos complexos explícitos foram dados por R. L. Bryant e S. Salamon em conjunto e no caso compacto, foram dados por D. D. Joyce. Quanto às definições:

O grupo $U(m) \subset SO(2m)$ é o conjunto das transformações lineares ortogonais complexas de $\mathbb{C}^m = \mathbb{R}^{2m}$ com o produto interno Hermitiano $\langle z, w\rangle = \bar{z^1}w^1 + ... + \bar{z^m}w^m$

O grupo $SU(m)$ é o subgrupo de $U(m)$ cujos elementos tem $\det = 1$.

O grupo $Sp(m)Sp(1) \subset SO(4m)$ é o quociente de $Sp(m) \times Sp(1)$ pelo grupo $\mathbb{Z}_2 = \{\pm Id_m, \pm 1\}$.

O grupo $Sp(m)$ pode ser definido da seguinte maneira. Se nós dotamos $\mathbb{R}^{4m} = \mathbb{H}^m$ com o produto interno (com valores em $\mathbb{H}$) $\langle x, y\rangle = \bar{x^1}y^1 + ... + \bar{x^m}y^m$, então Sp(m) é o conjunto das transformações lineares de $\mathbb{H}^m$ que preservam $\langle\ ,\ \rangle$.

O grupo G_2 é definido por: Seja $e_1, ..., e_7$ uma base orientada ortonormal de $\mathbb{R}^7$. Seja $\omega^1, ..., \omega^7$ as 1-formas duais em $\mathbb{R}^7$. Escrevemos ω^{ijk} para denotar $\omega^i \wedge \omega^j \wedge \omega^k$. Seja $\Phi_0 \in \Lambda(\mathbb{R}^7)^*$ dada por

$$\Phi_0 = \omega^{123} + \omega^{145} + \omega^{167} + \omega^{246} - \omega^{257} - \omega^{356} - \omega^{347}.$$

Então $\mathrm{G}_2 \subseteq \mathrm{SO}(7)$ é o subgrupo que fixa Φ_0.

E finalmente, o grupo Spin(7) é definido por: Usando a mesma notação que usamos para definir o G_2, nós fazemos um mergulho de $\mathbb{R}^7$ em $\mathbb{R}^8$ e estendemos a base adicionando um e_0. Nesse caso as 1-formas duais serão, como antes, $\omega^0, ..., \omega^7$. Seja $\Phi_0 \in \Lambda^3((\mathbb{R}^7)^*)$ e $*\Phi_0 \in \Lambda^4((\mathbb{R}^7)^*)$ (operação estrela de Hodge) definida como anteriormente e defina

$$\Phi = \omega^0 \wedge \Phi_0 + (*\Phi_0)$$

Então, $\mathrm{Spin}(7) \subseteq \mathrm{SO}(8)$ é o subgrupo que fixa Φ.

Bibliografia

[1] D. V. Alekseevsky. Riemannian spaces with exceptional holonomy. *Functional Analysis and Its Applications*, 2:97–105, 1968.

[2] Marcel Berger. Sur les groupes d'holonomie homogènes de variétés à connexion affine et des variétés riemanniennes. *Bull. Soc. Math. Fr.*, 83:279–330, 1955.

[3] Armand Borel. *M.I.T seminar notes on Symmetric Spaces.* 1958.

[4] Nicolas Bourbaki. *Integration. Elements of Mathematics*, volume 1–2. Springer, 2004.

[5] Élie Cartan. Sur une classe remarquable d'espaces de riemann. *Bulletin de la Société Mathématique de France*, 54:214–264, 1926.

[6] Manfredo Perdigão do Carmo. *Riemannian Geometry.* Birkhäuser, 1992.

[7] K. Yano e S. Bochner. *Curvature and Betti numbers.* Annals of Math Studies, volume 32, 1953.

[8] William Fulton and Joe Harris. *Representation theory: a first course.* Springer, 1999.

[9] Sigurdur Helgason. *Differential geometry, Lie groups, and symmetric spaces.* Academic press, 1978.

[10] Dominic D Joyce. *Compact manifolds with special holonomy.* Oxford university press, 2000.

[11] Shoshichi Kobayashi and Katsumi Nomizu. *Foundations of differential geometry.* New York.

[12] Deane Montgomery and Hans Samelson. Transformation groups of spheres. *Annals of Mathematics*, 44(3):pp. 454–470, 1943.

[13] Simon Salamon. *Riemannian Geometry and Holonomy Groups*. Oxford, 1988.

[14] James Simons. On the transitivity of holonomy systems. *Annals of Mathematics*, 76(2):pp. 213–234, 1962.

[15] H Yamabe. On an arcwise connected subgroup of a lie group. *Osaka Journal of Mathematics*, 2:13–14, 1950.