Verschränkung und Verschränkungsmaße

Tobias Fritz

Überblick

Beispiele

Bell-Zustände

$$|\phi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|00\rangle + |11\rangle\right), \quad |\phi^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|00\rangle - |11\rangle\right)$$

$$|\psi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|01\rangle + |10\rangle\right), \quad |\psi^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|01\rangle - |10\rangle\right)$$

Zusammengesetzte Systeme

Gegeben: physikalisches System aus Teilsystemen A und B mit Zustandsräumen $\mathcal{H}_A$ und $\mathcal{H}_B$.

Dann ist der Zustandsraum des Gesamtsystems gegeben durch

$$\mathcal{H}_{AB} = \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$$

Annahme: Teilchen in A und B sind unterscheidbar; sonst bosonische bzw fermionische Statistik.

Kurzschreibweise

Statt $|0\rangle \otimes |0\rangle$ schreibt man auch $|0\rangle|0\rangle$ oder sogar $|00\rangle$. Analog $|01\rangle = |0\rangle|1\rangle = |0\rangle \otimes |1\rangle$ etc.

Verschränkung reiner Zustände

Definition

- Ein reiner Zustand $|\psi\rangle \in \mathcal{H}_{AB}$ heisst separabel, falls er in der Form
$$|\psi\rangle = |\psi_A\rangle \otimes |\psi_B\rangle, \quad \psi_A \in \mathcal{H}_A,\, \psi_B \in \mathcal{H}_B$$
geschrieben werden kann.
- Andernfalls heisst der Zustand verschränkt.

Schmidt-Zerlegung und Schmidt-Rang

Sei $n_A = \dim(\mathcal{H}_A)$, $n_B = \dim(\mathcal{H}_B)$, $n_A \leq n_B$, $\mathcal{H}_{AB} = \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$.

Schmidt-Zerlegung

Jeder reine Zustand $|\psi\rangle \in \mathcal{H}_{AB}$ kann in der Form

$$|\psi\rangle = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i |\psi_i^A\rangle |\psi_i^B\rangle, \quad \alpha_i > 0,\ r \leq n_A$$

geschrieben werden, mit jeweils orthonormalen $|\psi_i^A\rangle$ und $|\psi_i^B\rangle$.

Schmidt-Rang

- Dann heisst $r = r(|\psi\rangle)$ der Schmidt-Rang von $|\psi\rangle$.
- Somit ist $|\psi\rangle$ genau dann verschränkt falls $r(|\psi\rangle) > 1$.

Reduzierte Dichtematrizen

Sei ρ_{AB} Zustand des Gesamtsystems, O Observable auf A. Erwartungswert

$$\langle O \rangle = \mathrm{tr}_{AB}\left[(O \otimes \mathbf{1})\rho_{AB}\right]$$

$$= \mathrm{tr}_A\left[O\,\mathrm{tr}_B(\rho_{AB})\right]$$

$\rightarrow$ Von A aus gesehen ist der Zustand des Systems nicht von der reduzierten Dichtematrix

$$\rho_A^{\mathrm{red}} = \mathrm{tr}_B(\rho_{AB})$$

zu unterscheiden. ρ_B^{red} analog.

Reduzierte Dichtematrizen

Sei wieder $|\psi\rangle = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i |\psi_i^A\rangle|\psi_i^B\rangle$.

- Die reduzierten Dichtematrizen haben dann die Form

$$\rho_A^{\mathrm{red}} = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i^2 \, |\psi_i^A\rangle\langle\psi_i^A|, \qquad \rho_B^{\mathrm{red}} = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i^2 \, |\psi_i^B\rangle\langle\psi_i^B|$$

- Somit sind die α_i^2 sowohl die (nichttrivialen) Eigenwerte von ρ_A^{red} als auch die von ρ_B^{red}.
- Insbesondere gilt

$$r(|\psi\rangle) = \mathrm{rang}(\rho_A^{\mathrm{red}}) = \mathrm{rang}(\rho_B^{\mathrm{red}})$$

- $|\psi\rangle$ ist also genau dann separabel falls ρ_A^{red} ein reiner Zustand ist.

von Neumann-Entropie

Definition

$$S(\rho) = \mathrm{tr}(\rho \ln \rho)$$

$S(\rho)$ gibt an wie gross die "Unordnung" in ρ ist.

- $S(\rho) = 0 \iff \rho$ reiner Zustand

von Neumann-Entropie bei Verschränkung

$S(|\psi\rangle\langle\psi|) = 0$ da reiner Zustand. Aber $S(\rho_A^{\mathrm{red}}) > 0$ da gemischter Zustand – das Teilsystem hat mehr Entropie als das Gesamtsystem!

Beispiele für Zustände dreikomponentiger Systeme

GHZ-Zustand (Greenberger, Horne, Zeilinger)

$$|GHZ\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|000\rangle + |111\rangle\right)$$

Bei Messung an einem der drei Qubits geht die Verschränkung verloren.

W-Zustand

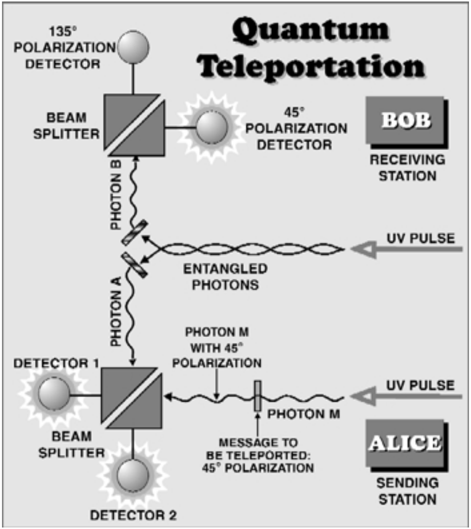
$$|W\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(|001\rangle + |010\rangle + |100\rangle\right)$$

Nach Messung an einem der drei Qubits können sich die beiden anderem in einem Bell-Zustand befinden.

Effekte von Verschränkung

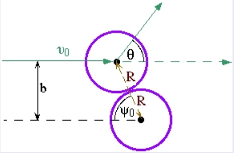
- Abhörsicherer Schlüsselaustausch
- Quantenteleportation
- Dichte Kodierung
- Verschränkungstausch

Quantenteleportation



Klassische Korrelationen

Beispiel



Annahme: Stoßparameter b unbekannt
$\longrightarrow$ Bahnen korreliert

- Trotz scheinbar spukhafter Fernwirkung: Phänomene dieser Art sind keine Verschränkung!
- Andernfalls ist eine Beschreibung durch versteckte Variablen möglich, das System verhält sich klassisch.
- Die Observablen sind also genauso wichtig wie der Zustandsraum.

Verschränkung gemischter Zustände und Verschränkungsmaße

- Definition von Verschränkung
- Das LOCC-Prinzip
- Definition von Verschränkungsmaß
- Beispiele von Verschränkungsmaßen

Verschränkung gemischter Zustände

Definition

- Ein (gemischter) Zustand ρ_{AB} heisst separabel, falls er als Mischung
$$\rho_{AB} = \sum_i p_i \, |\psi_i^{\mathrm{sep}}\rangle\langle\psi_i^{\mathrm{sep}}|$$
von separablen $|\psi_i^{\mathrm{sep}}\rangle$ geschrieben werden kann.
- Andernfalls heisst der Zustand verschränkt.

Somit bilden die separablen Zustände eine konvexe Untermenge aller Zustände.

Alternative Definition

Der Zustand ρ_{AB} ist genau dann separabel, falls er als Mischung von Produktzuständen geschrieben werden kann:

$$\rho_{AB} = \sum_i p_i \left[\rho_i^A \otimes \rho_i^B \right]$$

- Mit $\rho_i^A = \sum_j q_{ij}^A \, |\psi_{ij}^A\rangle\langle\psi_{ij}^A|$ und $\rho_i^B = \sum_j q_{ij}^B \, |\psi_{ij}^B\rangle\langle\psi_{ij}^B|$ erkennt man, dass ein solcher Zustand auch nach der ersten Definition separabel ist.
- Umgekehrt hat jede Konvexkombination separabler reiner Zustände offensichtlich diese Form.

Beispiel

Mischung zweier Bell-Zustände:

$$\rho_{AB} = \frac{1}{2}\left(|\phi^+\rangle\langle\phi^+| + |\phi^-\rangle\langle\phi^-|\right)$$

$$= \frac{1}{4}\Big[\big(|00\rangle + |11\rangle\big)\big(\langle 00| + \langle 11|\big) + \big(|00\rangle - |11\rangle\big)\big(\langle 00| - \langle 11|\big)\Big]$$

$$= \frac{1}{2}\left[|00\rangle\langle 00| + |11\rangle\langle 11|\right]$$

Somit ist der Zustand separabel!

Konsequenzen

- Bei gemischten Zuständen ist das Erkennen von Verschränkung ein sehr schwieriges Problem.
- Auch separable Zustände können klassische Korrelationen zeigen.

Local Operations and Classical Communication (LOCC)

Definition

$|\psi\rangle \in \mathcal{H}_{AB}$ ist durch LOCC in $|\phi\rangle \in \mathcal{H}_{AB}$ überführbar, falls es ein Protokoll bestehend aus einer Folge von Schritten

- Durchführung einer beliebigen Operation an einem der Teilsysteme:
  - unitäre Entwicklung
  - Messung (von Neumann oder POVM)
  - Hinzunahme eines Hilfssystems
  - allgemein: beliebige Quantenoperation Λ
- Klassische Kommunikation von Messergebnissen (zur Festlegung der weiteren lokalen Operationen)

gibt, die $|\psi\rangle$ mit Sicherheit in $|\phi\rangle$ umwandelt.

Local Operations and Classical Communication (LOCC)

Beispiele

- Jeder Zustand ist durch LOCC in jeden separablen Zustand überführbar.
- Durch das Teleportationsprotokoll ist $|\phi^+\rangle_{AB}|q\rangle_{B'}$ in $|q\rangle_A|\phi^+\rangle_{BB'}$ LOCC-überführbar, wobei $|q\rangle$ ein beliebiges Qubit ist.
- Durch das Verschränkungstauschprotokoll ist $|\phi^+\rangle_{AB}|\phi^+\rangle_{B'C}$ in $|\phi^+\rangle_{AC}|\phi^+\rangle_{BB'}$ LOCC-überführbar.

Verschränkungsmaße

Sei $\mathcal{D}(\mathcal{H}_{AB})$ die Menge der Dichtematrizen auf $\mathcal{H}_{AB}$.

Definition

Eine Abbildung $E : \mathcal{D}(\mathcal{H}_{AB}) \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ heisst Verschränkungsmaß, falls E monoton fallend unter LOCC ist, d.h.:

- Ist ρ durch LOCC in ρ' überführbar, dann ist $E(\rho') \leq E(\rho)$.

- Idee: Verschränkung kann sich unter LOCC nicht verstärken.
- Konsequenz: E nimmt auf allen separablen Zusänden denselben Wert an. Also kann angenommen werden

$$E(\rho_{AB}^{\mathrm{sep}}) = 0$$

Gegenseitige Information

Definition

$$\mathcal{I}(\rho_{AB}) = S(\rho_A^{\mathrm{red}}) + S(\rho_B^{\mathrm{red}}) - S(\rho_{AB})$$

misst die wechselseitige Abhängigkeit der Teilsysteme.

Problem: $\mathcal{I}$ misst auch klassische Korrelationen, zum Beispiel ist

$$\mathcal{I}\left(\frac{1}{2}|00\rangle\langle 00| + \frac{1}{2}|11\rangle\langle 11|\right)$$

$$= S\left(\frac{1}{2}\mathbf{1}_2\right) + S\left(\frac{1}{2}\mathbf{1}_2\right) - S\left(\frac{1}{2}|00\rangle\langle 00| + \frac{1}{2}|11\rangle\langle 11|\right)$$

$$= \ln 2 + \ln 2 - \ln 2 = \ln 2 > 0$$

Somit ist $\mathcal{I}$ kein Verschränkungsmaß!

Relative Entropie

Definition

Die Entropie von ρ relativ zu σ ist

$$S(\rho||\sigma) = \mathrm{tr}[\rho(\ln\rho - \ln\sigma)]$$

- Interpretation: Nach Messung an n Kopien von σ glaubt man mit Wahrscheinlichkeit $e^{-nS(\rho||\sigma)}$ jeweils den Zustand ρ bekommen zu haben.
- Es gilt:
  - $S(\rho||\sigma) \geq 0$
  - $S(\rho||\sigma) = 0 \iff \rho = \sigma$
  - $\mathcal{I}(\rho_{AB}) = S(\rho_{AB}||\, \rho_A^{\mathrm{red}} \otimes \rho_B^{\mathrm{red}})$
  - $S(\,|\psi\rangle\langle\psi|\,||\sigma) = -\mathrm{tr}(|\psi\rangle\langle\psi|\ln\sigma) = -\langle\psi|\ln\sigma|\psi\rangle$

Relative Verschränkungsentropie

Definition

Die relative Verschränkungsentropie ist gegeben durch

$$E_R(\rho_{AB}) = \min_{\sigma \text{ sep.}} S(\rho_{AB} || \sigma)$$

- Interpretation: Abstand vom “nächsten” separablen Zustand
- Im allgemeinen wird das Minimum bei $\sigma \neq \rho_A^{\mathrm{red}} \otimes \rho_B^{\mathrm{red}}$ erreicht, so dass $E_R(\rho_{AB}) < \mathcal{I}(\rho_{AB})$.
- Es gilt: $E_R(\rho_{AB}) = 0 \iff \rho_{AB}$ ist separabel.

Allgemein erzeugt eine Abstandsfunktion $\mathcal{D}(\rho, \sigma)$ unter gewissen Voraussetzungen ein zugehöriges Verschränkungsmaß

$$E_{\mathcal{D}}(\rho_{AB}) = \min_{\sigma \text{ sep.}} \mathcal{D}(\rho_{AB}, \sigma)$$

Mischungsverschränkung

Bei reinem Zustand $|\psi\rangle \in \mathcal{H}_{AB}$ kann Verschränkung durch die Teilsystem-Entropie

$$S(\rho_A^{\mathrm{red}}) = S(\rho_B^{\mathrm{red}}) = \frac{\mathcal{I}\left(|\psi\rangle\langle\psi|\right)}{2}$$

quantifiziert werden.

Definition

Konvexe Fortsetzung auf gemischte Zustände

$$E_F(\rho_{AB}) = \min_{\rho_{AB} = \sum_j p_j |\psi_j\rangle\langle\psi_j|} \sum_i p_i S(\rho_{|\psi_i\rangle}^{\mathrm{red}})$$

ergibt die Mischungsverschränkung.

Konvexe Fortsetzung allgemein

Definition

$E : \mathcal{H}_{AB} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ heisst monoton, falls der Erwartungswert unter lokale Operationen nicht wächst:

$$\sum_i p_i E(|\psi_i\rangle) \leq E(\psi\rangle)$$

für $|\psi\rangle \longrightarrow \{|\psi_i\rangle, p_i\}$ lokale stochastische Operation.

In diesem Fall kann E auf alle Zustände konvex fortgesetzt werden

$$E(\rho) = \min_{\rho = \sum_j p_j |\psi_j\rangle\langle\psi_j|} \sum_i p_i E(|\psi_i\rangle)$$

zu einem Verschränkungsmaß.

Operativ definierte Verschränkungsmaße

Destillierbare Verschränkung

Für $n \to \infty$ können aus n Kopien von ρ bis zu $(n \cdot E_D(\rho))$ Bell-Zustände durch LOCC gewonnen werden.

Verschränkungskosten

Für $n \to \infty$ können aus n Bell-Zuständen bis zu $(n \cdot E_C(\rho))$ Zustände ρ durch LOCC gewonnen werden.

- Es folgt $E_D(\rho_{AB}) \leq E_C(\rho_{AB})$.
- Für reine Zustände ist $E_D(|\psi\rangle\langle\psi|) = E_C(|\psi\rangle\langle\psi|) = S(\rho_A^{\mathrm{red}})$.

Anwendungen von Verschränkungsmaßen in Spinsystemen

1D-Quanten-Ising-Modell $H = \sum_{\{i,j\}} S_i^x S_j^x + h \sum_i S_i^z$

- Verschränkung vorhanden zB bei $T = 0$ und $h \neq 0$. Eine Divergenz in der ersten Ableitung des Verschränkungsmaßes zeigt die Existenz eines Phasenübergangs bei Variation von h.
- An diesm Phasenübergang divergiert die "Verschränkungslänge", was auf makroskopische Verschränkung hindeutet.

Thermodynamische Grössen können Verschränkung detektieren

Auch bei $T > 0$ können Spinsysteme Verschränkung zeigen, teilweise so dass χ_{mag} kleiner ist als in jedem separablen Zustand

$\rightarrow$ experimentell überprüfbar! zB für $\mathrm{MgTiOBO_3}$ bei bis zu $75\,\mathrm{K}$.

Zusammenfassung

- Verschränkung ist ein Quanteneffekt und zu unterscheiden von klassischen Korrelationen.
- Verschränkung hat zahlreiche kontraintuitive Effekte und Eigenschaften.
- Verschränkung ist schwierig zu erkennen und zu quantifizieren.
- Es existieren viele verschiedene LOCC-monotone Verschränkungsmaße, die in Anwendungen zur Quantifizierung von Verschränkung verwendet werden.

Vorschläge zur Diskussion

- Wie wichtig ist Verschränkung für Quantenoptik, Quantencomputing, . . . ?
- Was ist Verschränkung im Fall von ununterscheidbaren Teilchen?
- Kann es Verschränkung makroskopischer Objekte geben?

Schluss